

به نام خدای لوح و قلم

کتاب درسی زیره‌بین

# هندسه (۲)

پایه یازدهم

تألیف و گردآوری: مجید فرهمندپور

نکات کتاب درسی

بررسی خطبه‌خط کتاب درسی

تست‌ها و پرسش‌های متناسب با درس



## مقدمه ناشر

### ◀ معرفی انتشارات کاپ

انتشارات کاپ در سال ۱۳۹۸ با هدف «تولید محتوای آموزشی» اعلام موجودیت کرد. سیاست ما تولید آثاری است که فقدان و نیاز به آن‌ها در فضای آموزشی کشور احساس می‌شود.

### ◀ کتاب درسی خیلی مهم است!

مهم‌ترین و اولین منبعی که دانش‌آموز پس از حضور در کلاس درس باید به آن مراجعه کند، «کتاب درسی» است؛ این در حالی است که اکثر دانش‌آموزان قدم اول را به اشتباه با مطالعه کتاب‌های کمک‌درسی که گاهی فاصله زیادی تا کتاب درسی دارند، برمی‌دارند و نتیجه این تصمیم اشتباه و پرش مطالعاتی، یادگیری ناقص و ناآمادگی در آزمون‌های مرتبط با درس مورد نظر است.

### ◀ با مطالعه «کتاب‌های درسی زیر ذره‌بین»، به چه نتایجی می‌رسید؟

واقعیت این است که اکثر دانش‌آموزان یا کتاب درسی را اصلاً نمی‌خوانند یا به‌طور سطحی می‌خوانند. این رویکردانی از کتاب درسی می‌تواند دلایل زیادی داشته باشد:  
دلیل اول: ممکن است کتاب درسی برای دانش‌آموز قابل درک نباشد.  
دلیل دوم: ممکن است دانش‌آموز با خواندن کتاب درسی به هدف خود در فهم کامل مفاهیم کتاب و گرفتن نتیجه مناسب در آزمون‌های آن درس نرسد.

به دلایل دیگر کاری نداریم! «کتاب‌های درسی زیر ذره‌بین» دقیقاً برای رفع دو اشکال بالا طراحی و تألیف شده‌اند. در این کتاب‌ها، مؤلف خود را در جایگاهی قرار می‌دهد که مفاهیم یک درس را با استفاده مستقیم از متن کتاب درسی به خواننده یاد می‌دهد و هر جا نیاز به تفسیر مطلب، توضیح بیشتر، پرسش یا تست است، آن را به کتاب اضافه می‌کند تا کتاب درسی به‌طور کامل درک شود. با این کتاب‌ها به پایه‌های لازم برای پیشرفت در دروس خود دست پیدا می‌کنید. خیالتان که از بابت درک کتاب راحت شد، می‌توانید به منبع دیگری (مانند کتاب‌های تست) برای افزایش مهارت و رسیدن به تسلط در آن درس مراجعه کنید. تأکید می‌کنیم این کتاب‌ها حل‌المسائل نیستند، هر چند که ممکن است بعضی از پرسش‌های مهم کتاب درسی مورد بررسی قرار گرفته باشند.

## مقدمه مؤلف

سپاس و ستایش خدای متعال را که توفیق تألیف و تدوین این کتاب را عنایت فرمود تا سعی در پیشبرد اهداف ملی دانش‌آموزان این مرز و بوم داشته باشم.  
در تدوین کتاب عزیزان زیادی دست من را فشردند و پا به پای من دویدند که تشکر می‌کنم از همه این عزیزان به خصوص:

– مدیران محترم و فرهیخته انتشارات کاپ به خصوص جناب آقای مصلائی عزیز دوست قدیمی خودم؛

– خانم سیما رائفی نیا که در طراحی این اثر زحمت فراوان کشیدند.

این کتاب را تقدیم می‌کنم به همسر عزیزم که در این سالها نبودن‌هایم را بردباری کرد و با صبر و شکیبایی به من دلگرمی بخشید.

# فهرست

فصل ۱ : دایره	۹
درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره	۱۰
درس دوم : رابطه‌های طولی در دایره	۱۸
درس سوم : چند ضلعی‌های محاطی و محیطی	۲۴
فصل ۲ : تبدیل‌های هندسی و کاربردها	۳۳
درس اول : تبدیل‌های هندسی	۳۴
درس دوم : کاربرد تبدیل‌ها	۵۲
فصل ۳ : روابط طولی در مثلث	۶۱
درس اول : قضیه سینوس‌ها	۶۲
درس دوم : قضیه کسینوس‌ها	۶۶
درس سوم : قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها	۷۰
درس چهارم : قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)	۷۳

فصل اول

## دایره



■ **هندسه در ساخت استحکامات دفاعی، قلعه‌ها و برج و باروها از دیرباز کاربردهای بسیاری داشته است. یک قضیه بنیادی در هندسه موسوم به «قضیه هم‌پیرامونی» می‌گوید در بین همه شکل‌های هندسی بسته با محیط ثابت دایره دارای بیشترین مساحت است. این موضوع در طراحی دایره‌ای شکل قلعه‌ها اهمیت بسیاری دارد. قلعه فلک‌الافلاک (شاپور خواست) که از دوره ساسانیان در شهرستان خرم‌آباد به‌جای مانده است نمونه گویایی از همین کاربردهاست.**



درس اول

## مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره یکی از شکل‌های مهم در هندسه است که در پایه‌های قبل با تعریف و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شده‌اید. در ادامه با استفاده از شکل دایره، برخی موارد یادآوری شده‌است که از قبل با آنها آشنایی دارید.

همان‌طور که می‌دانید تمام نقاطی که روی دایره واقع‌اند از مرکز دایره به یک فاصله ثابت (اندازه شعاع دایره) هستند. معمولاً دایره  $C$  به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  را به صورت  $C(O,r)$  نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل دایره به سادگی می‌توان نشان داد که:

(الف) اگر نقطه‌ای مانند  $B$  روی دایره  $C(O,r)$  باشد، فاصله آن تا مرکز دایره  $\dots$  شعاع دایره است.

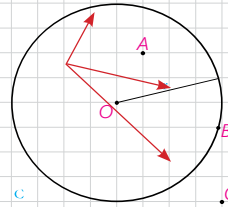
(ب) اگر نقطه‌ای مانند  $C$  بیرون دایره  $C(O,r)$  باشد، فاصله آن تا مرکز دایره  $\dots$  شعاع دایره است.

(پ) اگر نقطه‌ای مانند  $A$  درون دایره  $C(O,r)$  باشد، فاصله آن تا مرکز دایره  $\dots$  شعاع دایره است.

دایره  $A \Rightarrow OA < r$

روی دایره  $B \Rightarrow OB = r$

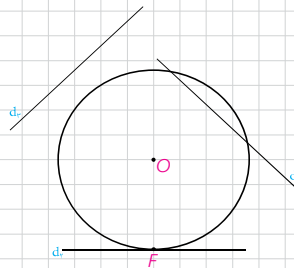
قارچ دایره  $C \Rightarrow OC > r$



### ■ اوضاع نسبی خط و دایره

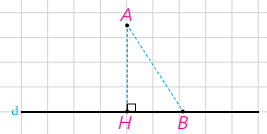
در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطه اشتراک داشته، و یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند.

در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود **خط بر دایره مماس است** و در حالتی که خط و دایره دو نقطه اشتراک داشته باشند، **خط و دایره را متقاطع می‌نامند**. در این حالت خط را نسبت به دایره **قاطع می‌نامیم**.



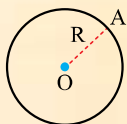
### 📍 یادآوری

اگر خط  $d$  و نقطه  $A$  بیرون دایره بر  $d$  داده شده، و نقطه  $H$  پای عمودی باشد که از  $A$  به  $d$  رسم می‌شود، اندازه پاره خط  $AH$  همان فاصله نقطه  $A$  از خط  $d$  است و فاصله نقطه  $A$  از دیگر نقاط خط  $d$  از این مقدار بزرگ‌تر است ( $AB > AH$ ).



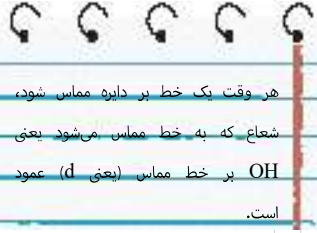
(دیبرستان واله-۱۴۰۰)

**پرسش** نقطه  $A$  روی دایره  $C(O,r)$  است. اگر فاصله نقطه  $A$  از مرکز دایره  $۳m - ۲$  باشد، مقدار  $m$  را حساب کنید.

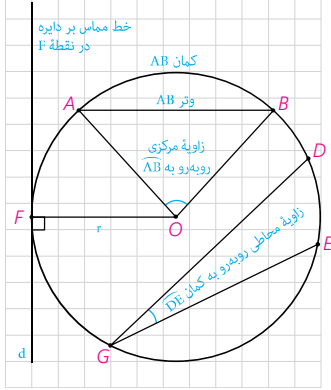
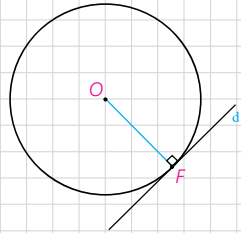
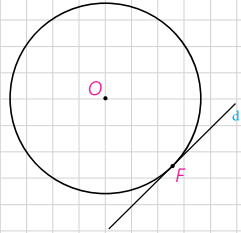
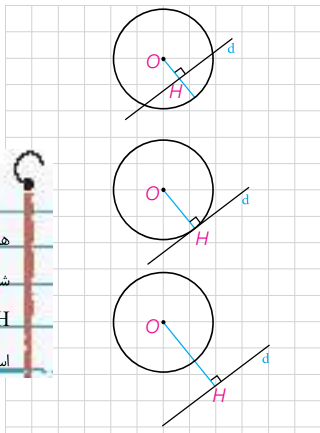


$$OA = R \Rightarrow 3m - 2 = r \Rightarrow 3m = 9 \Rightarrow m = 3$$

**پاسخ** چون نقطه  $A$  روی دایره است پس  $OA = R$  است.



هر وقت یک خط بر دایره مماس شود، شعاع که به خط مماس می‌شود یعنی OH بر خط مماس (یعنی d) عمود است.



اگر d یک خط و C(O,r) یک دایره و نقطه H پای عمودی باشد که از نقطه O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر فاصله خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد ( $OH < r$ )، خط و دایره .....؟؟..... نقطه اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع‌اند

ب) اگر فاصله خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد ( $OH = r$ )، خط و دایره ..... یک نقطه اشتراک دارند؛ یعنی مماس‌اند.

پ) اگر فاصله خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد ( $OH > r$ )، خط و دایره نقطه مشترک ندارند.

**فعالیت**

۱- فرض کنیم خط d بر دایره C در نقطه F مماس است. الف) نزدیک‌ترین نقطه خط d به نقطه O کدام است؟ چرا؟ ب) از O به d عمود کنید. این خط عمود، خط d را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟ پ) نتیجه: اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F عمودند.

۲- خط d در نقطه F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همه نقاط خط d نسبت به دایره C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطه تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.

۳- با توجه به قسمت‌های ۱ و ۲ اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد، چگونه می‌توانید خط مماس بر دایره را در نقطه F رسم کنید؟ بنابراین: اول شعاع OF را رسم می‌کنیم سپس خطی که از F عبور می‌کند و بر OF عمود باشد، جواب مسئله است.

یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.

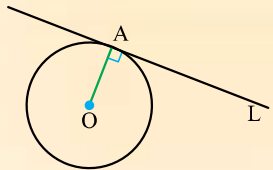
**زاوای مرکزی، محاطی و ظلی**

با تعاریف زاوای مرکزی و محاطی و کمان یک دایره در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید. در اینجا به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم.

- ۱- شعاع دایره: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشند.
- ۲- وتر دایره: پاره‌خطی که دوسر آن روی دایره باشد.

(نخبگان علامه طباطبائی-۱۳۹۸)

خط L بر دایره C(O,۱۲) مماس است. اگر فاصله خط L از مرکز این دایره  $۳ - \Delta m$  باشد، مقدار m را به دست آورید.



$$OA = R \Rightarrow \Delta m - 3 = 12 \Rightarrow \Delta m = 15 \Rightarrow m = 3$$

چون خط L بر دایره مماس است، پس  $OA = R$  است.

۳- قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.

۴- زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.

۵- زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو

وتر از دایره باشند.

۶- کمان: کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛

به این ترتیب هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان  $\widehat{AB}$  را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آنها می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد؛ مثلاً در شکل مقابل نقاط A و B دو کمان  $\widehat{ACB}$  و  $\widehat{ADB}$  را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از  $\widehat{AB}$  کمان کوچک‌تر مشخص شده توسط A و B است.

۷- اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد

آن درجه است.

۸- با توجه به شکل به سادگی دیده می‌شود که کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند.

**کاردرکلاس**

۱- با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان به اندازه  $36^\circ$  است، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{36^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{2\pi R}$$

(این زاویه به درجه است.)

۲- با توجه به شکل، اندازه کمان‌های زیر را بنویسید.

$$\begin{aligned} \widehat{AB} &= 60^\circ & \text{طول } \widehat{AB} &= \frac{60}{360} \times 2\pi \times 1 = \frac{\pi}{3} \\ \widehat{A_1B_1} &= 60^\circ & \text{طول } \widehat{A_1B_1} &= \frac{60}{360} \times 2\pi \times 2 = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

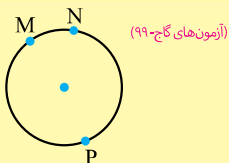
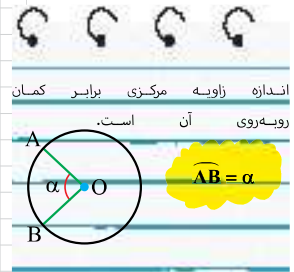
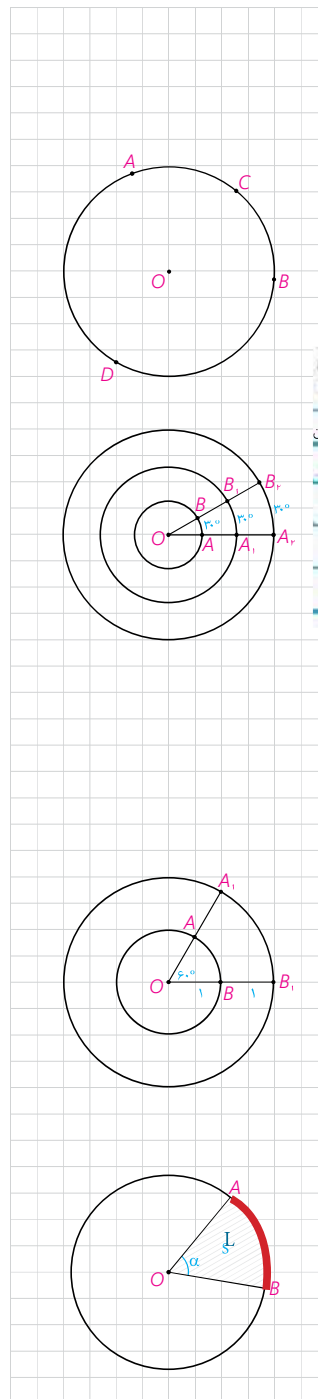
۳- ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است

یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره  $(O, R)$  بر حسب

درجه مساوی  $\alpha$  باشد، نشان دهید طول کمان  $AB$  برابر است با:  $L = \frac{\pi R}{180} \alpha$  و

مساحت قطاع برابر است با:  $S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{AB} \text{ کمان}}{360} = \frac{\text{طول کمان } \widehat{AB}}{\text{محیط}} &\Rightarrow \frac{\alpha}{360} = \frac{L}{2\pi R} \Rightarrow L = \frac{2\pi R \times \alpha}{360} \Rightarrow L = \frac{\pi R \alpha}{180} \\ \frac{S}{\text{کل } S} = \frac{\alpha}{360} &\Rightarrow \frac{S}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{360} \Rightarrow S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \end{aligned}$$



(آزمون‌های گاج-۹۹)

در شکل زیر  $\widehat{MP} = \widehat{NP} = \widehat{MN}$  اگر شعاع دایره  $R=9$  باشد. طول کمان MN کدام است؟

(۴)  $\pi$

(۳)  $2\pi$

(۲)  $5\pi$

(۱)  $4\pi$

۳ می‌دانیم مجموع کل کمان‌های دایره  $360^\circ$  است.

$$\widehat{MP} = \widehat{NP} = \widehat{MN} = 4\alpha \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MP} = 4\alpha \\ \widehat{NP} = 4\alpha \\ \widehat{MN} = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \widehat{MN} + \widehat{NP} + \widehat{PM} &= 360^\circ \Rightarrow \alpha + 4\alpha + 4\alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 40^\circ \\ \left| \widehat{MN} \right| = L &\Rightarrow L = \frac{\alpha \pi R}{180} \Rightarrow L = \frac{40 \pi \times 9}{180} \Rightarrow L = 2\pi \end{aligned}$$

**فعالیت**

۱- فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایره C(O,r) باهم برابرند. با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز باهم برابرند.

۲- فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD نیز باهم برابرند.

۳- وتر AB و قطری از دایره، که بر وتر AB عمود است، مانند شکل مقابل داده شده است. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.

۴- این بار فرض کنید قطر CD وتر AB را نصف کرده است و نشان دهید CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

۵- حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

۶- اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟ کافی است وسط کمان را به وسط وتر وصل کرده و امتداد می‌دهیم.

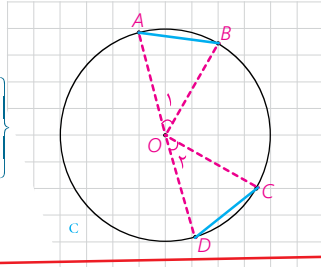
**فعالیت**

۱- در شکل مقابل  $\widehat{ADB}$  یک زاویه محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.

۲- اگر از B به O وصل کنیم، زاویه AOB یک زاویه خارجی برای مثلث OBD است.

بنابراین:  $\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \widehat{OBD} = 2\widehat{ODB}$  و از آن نتیجه می‌شود:

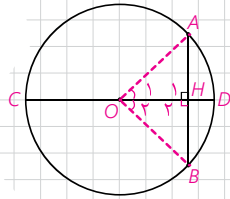
$$\widehat{ODB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$



$$\left. \begin{aligned} \widehat{O_1} &= \widehat{AB} \\ \widehat{O_2} &= \widehat{CD} \\ \widehat{CD} &= \widehat{AB} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} OA &= OC = R \\ OB &= OD = R \end{aligned}$$

ض ض ض  $\rightarrow \triangle ABO \cong \triangle COD$

ع.ا  $\rightarrow AB = CD$



$$\left. \begin{aligned} AD &= OC = R \\ BO &= OD = R \\ \text{فرض} &AB = CD \end{aligned} \right\}$$

ض ض ض  $\rightarrow \triangle ABO \cong \triangle COD$

ع.ا  $\rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

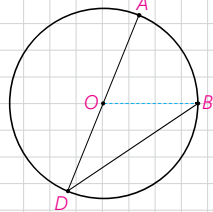
$$\left. \begin{aligned} \widehat{O_1} &= \widehat{AB} \\ \widehat{O_2} &= \widehat{CD} \\ \widehat{O_1} &= \widehat{O_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$\left. \begin{aligned} AH &= HB = R \text{ (وتر)} \\ OH &= OH \end{aligned} \right\}$$

ض ض ض  $\rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH$

ع.ا  $\rightarrow \left\{ \begin{aligned} AH &= HB \\ \widehat{O_1} &= \widehat{O_2} \\ H_1 &= H_2 = 90^\circ \end{aligned} \right. \xrightarrow{\text{مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{DB}$

- ۱- اگر شعاع دایره‌ای بر یک وتر از آن دایره عمود باشد، آن وتر و کمان مربوط به آن را نصف می‌کند.
- ۲- اگر قطر دایره یک وتر از آن دایره را نصف کند، کمان آن را هم نصف می‌کند و بر وتر عمود است.
- ۳- اگر وسط یک کمان را به وسط وتر آن وصل کنیم حتماً از مرکز دایره عبور می‌کند.



**پرسش** شعاع‌های دو دایره هم مرکز ۵ و ۳ سانتی متر هستند. اندازه وترى از دایره بزرگ‌تر را که بر دایره کوچک‌تر مماس است پیدا کنید.

**پاسخ** شعاع OH حتماً به پاره خط AB که بر دایره مماس است، عمود می‌باشد پس قطعاً وتر AB را نصف می‌کند، یعنی AH = HB = x

فیثاغورس  $\rightarrow \widehat{OHA} : \widehat{H} = 90^\circ \rightarrow OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 25 = x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

$AB = 2x \Rightarrow AB = 8$



۲- در این شکل  $\widehat{ADB}$  یک زاویه محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.  
 - اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ADE} &= \frac{1}{2} \widehat{AE} \\ \widehat{EDB} &= \frac{1}{2} \widehat{BE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

۳- در این شکل  $\widehat{ADB}$  یک زاویه محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند.  
 - اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ADE} &= \frac{1}{2} \widehat{AE} \\ \widehat{BDE} &= \frac{1}{2} \widehat{BE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

بنابراین:

**قضیه:** اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

### زاویه ظلی

نوع دیگری از زاویه، که در دایره مطرح است، زاویه ظلی است. زاویه ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد. در شکل مقابل  $\widehat{BAC}$  یک زاویه ظلی است.

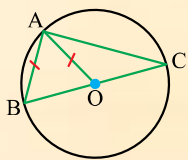
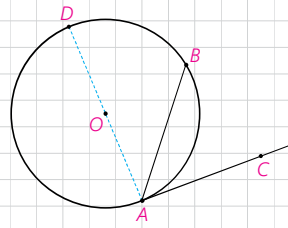
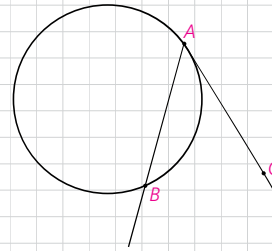
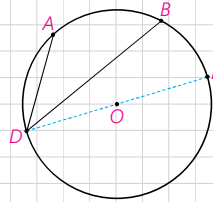
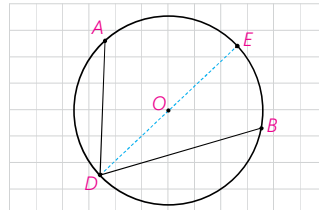
### فعالیت

۱- زاویه ظلی  $\widehat{CAB}$  را در نظر بگیرید و قطری از دایره را رسم کنید که شامل نقطه A هست.

(الف)  $\widehat{DAC} = \dots$  و  $\widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{AD}$  و بنابراین:

(ب) زاویه  $\widehat{DAB}$  یک زاویه محاطی است.

بنابراین:  $\widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{DB}$



(دبیرستان امام محمد باقر- دی ماه ۹۹)

**پرسش:** در شکل مقابل اگر O مرکز دایره باشد، زاویه  $\widehat{ACO}$  چند درجه است؟ ( $AO = AB$ )

$$\left. \begin{aligned} AO &= R \\ AB &= AO \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = R$$

زاویه C یک زاویه محاطی است پس داریم:

$$\triangle ABO : AB = AO = OB = R \xrightarrow{\text{متساوی‌الاضلاع زاویه مرکزی}} \left. \begin{aligned} \widehat{AOB} &= 60^\circ \\ \widehat{AOB} &= \widehat{AB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

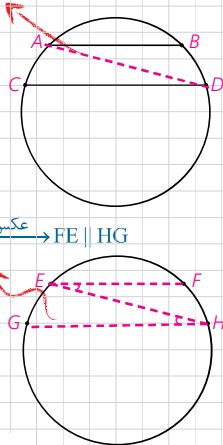
$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{C} = \frac{60^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ$$

AB || CD, مورب AD → قضیه خطوط موازی →  $\widehat{DAB} = \widehat{ADC}$  (۱)

$\widehat{BAD} = \frac{\widehat{BD}}{2}$  محاطی (۲)

$\widehat{ADC} = \frac{\widehat{AC}}{2}$  (۳)

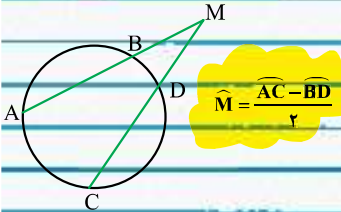
(۱), (۲), (۳) ⇒  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$



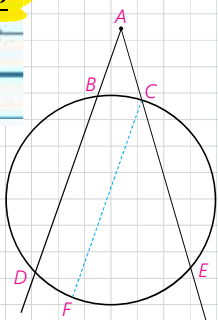
$\widehat{H} = \frac{\widehat{BG}}{2}$  محاطی  
 $\widehat{E} = \frac{\widehat{FH}}{2}$  محاطی  
 ⇒  $\widehat{H} = \widehat{E}$   
 عکس قضیه خطوط موازی → FE || HG  
 $\widehat{BG} = \widehat{EH}$



اگر دو وتر از یک دایره همدیگر را خارج دایره قطع کنید، زاویه به وجود آمده برابر نصف قدر مطلق تقاضل کمانهای به وجود آمده در دایره است.



$\widehat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2}$



پ) از (الف) و (ب) داریم :  $\widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{BD})$   
 و بنابراین  $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AB}$   
 ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی منفرجه نیز برقرار است.  
 بنابراین :

**قضیه:** اندازه هر زاویه ظلی برابر است با ..... کمان روبه‌رو به آن زاویه.

**کاردرکلاس**

- در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند. (الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ (ب) کمان‌های  $\widehat{BD}$  و  $\widehat{AC}$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم اندازه‌اند. (الف) وترهای EF و GH و پاره خط EH را رسم کنید. (ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ (ب) وترهای EF و GH نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

**نتیجه**

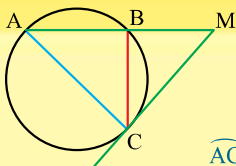
دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشد.

تاکنون زاویه‌هایی را بررسی کردیم که رأس آنها روی دایره باشد و رابطه اندازه این زاویه‌ها را با اندازه کمان‌های ایجاد شده توسط آنها مشخص کردیم. حال به بررسی این موضوع برای زاویه‌هایی می‌پردازیم که رأس آنها درون یا بیرون دایره است و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند.

**فعالیت**

- فرض کنید رأس زاویه DAE مانند شکل مقابل بیرون دایره واقع شده، و کمان‌های DE و BC توسط اضلاع زاویه موردنظر مشخص شده باشد. (الف) از نقطه C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هر کدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$\widehat{DAE} = \widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{DF}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$



در شکل زیر پاره خط MC بر دایره مماس شده است. اگر نسبت دو کمان  $\widehat{BC}$  و  $\widehat{AC}$  برابر  $\frac{4}{3}$  بوده و دو زاویه BMC و BCA برابر باشند، زاویه  $\widehat{ABC}$  چند درجه است؟ (آزمون موات - تیران ۹۹)

$\frac{\widehat{AC}}{\widehat{BC}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AC} = 4x \\ \widehat{BC} = 3x \end{cases}$

$\widehat{BMC} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BMC} = \frac{4x - 3x}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BCA} = \frac{x}{2}$

$\widehat{BCA} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = x$

$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} = 360 \Rightarrow x + 3x + 4x = 360 \Rightarrow 8x = 360 \Rightarrow x = 45$

$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{4x}{2} = 2x = 2(45) = 90$

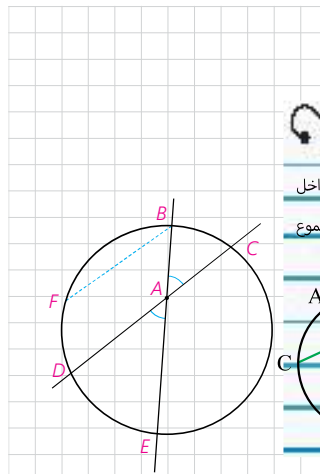
ب) از C به D وصل کنید و به کمک زاویه خارجی در مثلث ACD رابطه فوق را اثبات کنید.

۲- رأس زاویه DAE مانند شکل در درون دایره است و اضلاع این زاویه کمان‌های BC و DE را مشخص کرده‌اند.

الف) از نقطه B خطی موازی خط DC رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هر کدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE} = \widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$$

ب) از B به D وصل کنید و به کمک زاویه خارجی مثلث ABD رابطه فوق را اثبات کنید.



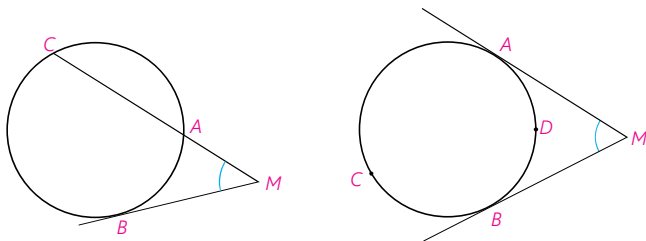
اگر دو وتر از یک دایره همدیگر را در داخل دایره قطع کنند، زاویه به وجود آمده نصف مجموع کمان‌های مقابل آن است.

$$\widehat{M}_1 = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$


**تمرین**

۱- در شکل‌های زیر ثابت کنید:

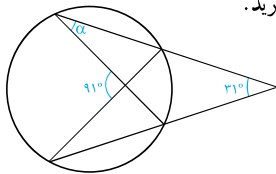
راهنمایی: از نقطه B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.



ب)  $\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$

ب)  $\widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$

۲- در شکل مقابل اندازه زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.



**بررسی** در شکل روبرو مقادیر x و y را تعیین کنید. (دبیرستان صدراي نور تبریز- دی ۹۹)

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{CE} + \widehat{BD}}{2} \Rightarrow 90 = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 180$$

$$\widehat{N} = \frac{\widehat{CE} - \widehat{BD}}{2} \Rightarrow 50 = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 100$$

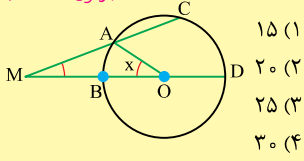
$$\begin{aligned} + & \rightarrow 2x = 280 \Rightarrow x = 140 \\ & 140 + y = 180 \Rightarrow y = 40 \end{aligned}$$

**تمرین** در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد. زاویه چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۹۸)

$OC = OD = CD = R \Rightarrow \widehat{OCD} = 60^\circ$   
 $\widehat{O_1} = \widehat{CD} = 60^\circ$   
 $\widehat{A} = \frac{(\theta + z + y) - x}{2} \Rightarrow 18 = \frac{60 + z + y - x}{2} \Rightarrow z + y - x = 100$   
 $\widehat{B} = \frac{(x + y + \theta) - z}{2} \Rightarrow 5 = \frac{x + y + 60 - z}{2} \Rightarrow x + y - z = 40$   
 $\begin{cases} z + y - x = 100 \\ x + y - z = 40 \end{cases} \Rightarrow 2y = 140 \Rightarrow y = 70^\circ$   
 $\widehat{EDF} = \frac{\widehat{EF}}{2} = \frac{y}{2} = \frac{70}{2} = 35^\circ$

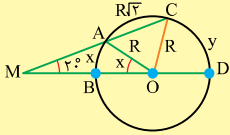
نمونه سوال ۶  
در شکل زیر اگر  $AC = \sqrt{2}R$  و  $\widehat{M} = 20^\circ$  باشد، اندازه زاویه  $x$  کدام است؟

(آزمون نشانه ۹۸)



- ۱۵ (۱)
- ۲۰ (۲)
- ۲۵ (۳)
- ۳۰ (۴)

را به O و A وصل می‌کنیم.



$$\triangle OAC: AC^2 = OA^2 + OC^2 \Rightarrow \widehat{AOC} = 90^\circ$$

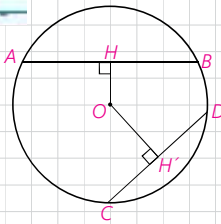
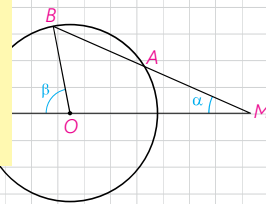
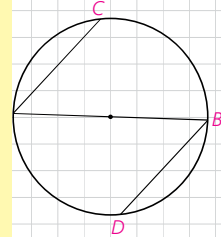
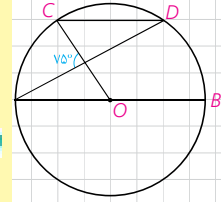
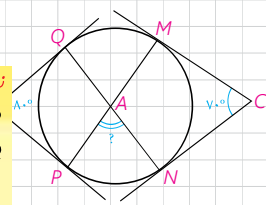
$$\widehat{BA} + \widehat{AC} + \widehat{CD} = 180$$

$$\Rightarrow x + 90 + y = 180 \Rightarrow x + y = 90$$

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{y - x}{2} \Rightarrow y - x = 40$$

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ x - y = -40 \end{cases} \Rightarrow 2x = 50 \Rightarrow x = 25$$



۳- در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه زاویه  $\widehat{A}$  چند درجه است؟

۴- در دایره رسم شده شکل مقابل  $CD \parallel AB$ ، اندازه کمان CD را به دست آورید.

۵- در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید:  $AC = BD$

۶- دایره  $C(O,R)$  مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و  $MA = R$ ؛ نشان دهید:  $\beta = 3\alpha$

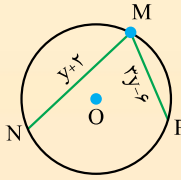
۷- در دایره  $C(O,R)$ ،  $\widehat{AB} = 60^\circ$  و  $AB = 10$  فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

۸- در دایره  $C(O,R)$  نشان دهید  $AB > CD$  اگر و تنها اگر  $OH < OH'$  (OH و  $OH'$  فاصله O از دو وتر AB و CD هستند).  
راهنمایی: از O به B و C وصل، و از قضیه فیثاغورس استفاده کنید.

از دو وتر نابرابر در یک دایره، آنکه بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است و برعکس.

بررسی در شکل مقابل MN به مرکز نزدیک‌تر است. حدود ۷ را بیابید.  
(دبیرستان امام محمد باقر- دی ۹۹)

اوتوری که به مرکز دایره نزدیک‌تر است، بزرگ‌تر است.

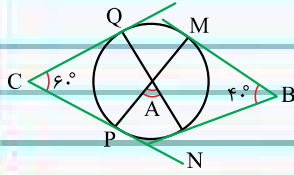
$$\left. \begin{aligned} MN > MP &\Rightarrow y+2 > 3y-6 \Rightarrow -2y > -8 \Rightarrow y < 4 \\ MN > 0 &\Rightarrow y+2 > 0 \Rightarrow y > -2 \\ MP > 0 &\Rightarrow 3y-6 > 0 \Rightarrow 3y > 6 \Rightarrow y > 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 < y < 4$$


سوالات امتحانی زیر زنده



۱. در شکل مقابل اندازه زاویه A را بیابید.

پاسخ:



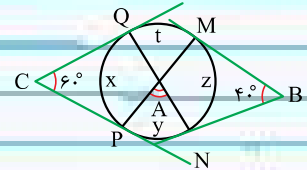
(دبیرستان دکتر حاجی‌دی، ۹۹)

$$\hat{C} = \frac{(y+z+t)-x}{2} \Rightarrow 60 = \frac{y+z+t-x}{2} \Rightarrow y+z+t-x = 120$$

$$\hat{B} = \frac{x+t+y-z}{2} \Rightarrow 40 = \frac{x+t+y-z}{2} \Rightarrow x+t+y-z = 80$$

$$\begin{cases} y+z+t-x = 120 \\ x+t+y-z = 80 \end{cases} \Rightarrow 2y+2t = 200 \Rightarrow y+t = 100$$

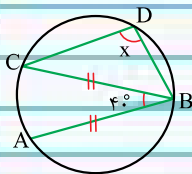
$$\hat{A} = \frac{y+t}{2} = \frac{100}{2} \Rightarrow \hat{A} = 50$$



۲. مقدار x را پیدا کنید.

پاسخ:

(سرای دانش واحد حافظ‌چی، ۹۷)



$$BC = AB \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{AB} = \alpha$$

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow 40 = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 80$$

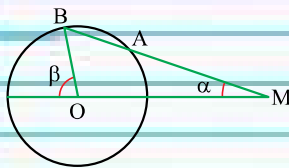
$$\widehat{AB} + \widehat{BDC} + \widehat{CA} = 360 \Rightarrow \alpha + \alpha + 80 = 360 \Rightarrow 2\alpha = 280 \Rightarrow \alpha = 140$$

$$\widehat{CDB} = \frac{\widehat{CAB}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{CA} + \widehat{AB}}{2} = \frac{80 + \alpha}{2} = \frac{80 + 140}{2} \Rightarrow x = 110$$

۳. دایره (O, ۲) مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خط چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و MA = ۲.

اگر  $\alpha = 20^\circ$  باشد، نشان دهید که  $\beta = 60^\circ$

پاسخ: O را به A وصل می‌کنیم.

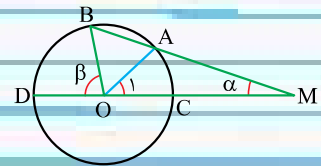


$$\left. \begin{matrix} OA = R = 2 \\ AM = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow OA = AM \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \hat{O}_1 = \hat{M} = \alpha = 20^\circ$$

$$\text{مرکزی } \hat{O}_1 = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AC} = \alpha = 20^\circ$$

$$M = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \Rightarrow 20 = \frac{\widehat{BD} - 20}{2} \Rightarrow 40 = \widehat{BD} - 20 \Rightarrow \widehat{BD} = 60^\circ$$

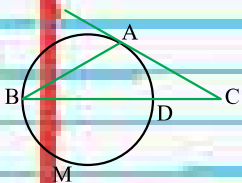
$$\text{مرکزی } \hat{\beta} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{BD} = 60^\circ$$



۴. در شکل زیر، مماس AC با وتر AB از دایره برابر است. اگر کمان  $\widehat{BMD} = 222^\circ$  باشد، اندازه  $\hat{C}$  را حساب کنید.

(دبیرستان کوشش‌جاه، ۹۸)

پاسخ:



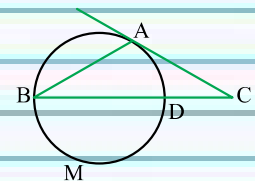
$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BMD}}{2} = \frac{222}{2} \Rightarrow \hat{A} = 111$$

$$\triangle ABC: AC = AB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \alpha$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow 111 + \alpha + \alpha = 180 \Rightarrow 2\alpha = 69 \Rightarrow \alpha = 34.5$$

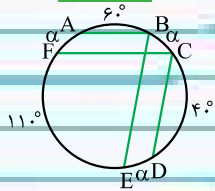
$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow 34.5 = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 69$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AD}}{2} \Rightarrow 34.5 = \frac{\widehat{AB} - 69}{2} \Rightarrow 69 = \widehat{AB} - 69 \Rightarrow \widehat{AB} = 138$$



۵. در شکل  $AB \parallel FC$  و  $BE \parallel CD$  و  $\widehat{AB} = 6^\circ$  و  $\widehat{CD} = 4^\circ$  و  $\widehat{EF} = 11^\circ$  باشد آنگاه زاویه  $\widehat{FCD}$  چقدر است؟

(دبیرستان فرگامر-۹۸)



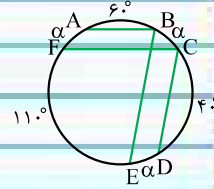
$$\left. \begin{aligned} AB \parallel FC &\Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{BC} \\ BE \parallel CD &\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{ED} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{BC} = \widehat{ED} = \alpha$$

پاسخ:

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{EF} + \widehat{FA} = 360^\circ \Rightarrow 6^\circ + \alpha + 4^\circ + \alpha + 11^\circ + \alpha = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 3\alpha = 150^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ$$

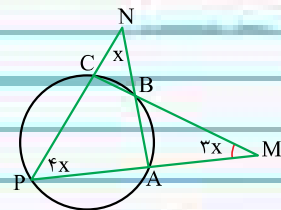
$$\widehat{FCD} = \frac{\widehat{FED}}{2} = \frac{\widehat{FE} + \widehat{ED}}{2} = \frac{11^\circ + 50^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{FCD} = 80^\circ$$



(دبیرستان والفخرداد-۱۴۰۰)

۶. در شکل مقابل، مقدار  $x$  کدام است؟

پاسخ: فرض کنیم  $\widehat{BC} = y$  و  $\widehat{BA} = z$  و  $\widehat{AP} = w$  و  $\widehat{PC} = t$  باشد.

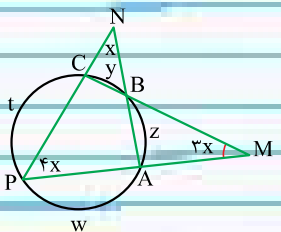


$$\widehat{N} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow x = \frac{w - y}{2} \Rightarrow 2x = w - y$$

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{PC} - \widehat{BA}}{2} \Rightarrow 3x = \frac{t - z}{2} \Rightarrow 6x = t - z$$

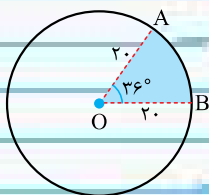
$$\widehat{P} = \frac{\widehat{CBA}}{2} \Rightarrow 4x = \frac{y + z}{2} \Rightarrow 8x = y + z \Rightarrow 16x = 2y + 2z$$

$$2x + 6x + 16x = w - y + t - z + 2y + 2z \Rightarrow 24x = y + z + w + t \Rightarrow 24x = 360^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$



(دبیرستان سما-خرداد-۱۴۰۰)

۷. مساحت قطاعی از دایره  $C(O, 20)$  را به دست آورید که زاویه مرکزی روبه رو به کمان  $36^\circ$  است.



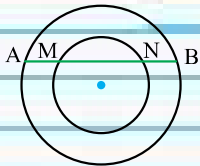
$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi (20)^2 \times 36}{360} = 400\pi$$

پاسخ:

(دبیرستان دین و دانش-۹۸)

۸. در شکل روبه رو دو دایره با هم، هم مرکز هستند. ثابت کنید  $AM = BN$ .

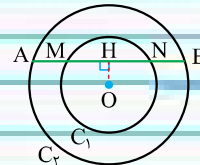
پاسخ: از O به پاره خط AB عمود می‌کنیم.



در دایره  $C_1$ ، OH عمود بر وتر MN است پس:  $MN = 2HN$

در دایره  $C_2$ ، OH عمود بر وتر AB است پس:  $AB = 2HB$

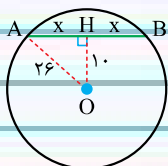
$$\left. \begin{aligned} AH = HB \\ MH = NH \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH - MH = HB - NH \Rightarrow AM = BN$$



(کتاب هندسه سوم دبیرستان نظام قدیم)

۹. دایره  $C(O, 26)$  مفروض است. اگر فاصله وتر AB از مرکز دایره ۱۰ باشد، طول وتر AB را حساب کنید.

پاسخ:



$$OH \perp AB \Rightarrow AH = HB = x$$

$$\triangle OAH: \widehat{H} = 90^\circ \xrightarrow{\text{پیتاگورس}} OA^2 = OH^2 + AH^2$$

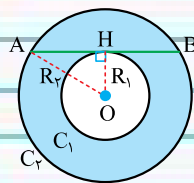
$$\Rightarrow 26^2 = 10^2 + x^2 \Rightarrow 676 = 100 + x^2 \Rightarrow x^2 = 576 \Rightarrow x = 24$$

$$AB = 2x = 2(24) \Rightarrow AB = 48$$

۱۰. دایره‌های  $C_1(O, R_1)$  و  $C_2(O, R_2)$  هم مرکز هستند. اگر طول وتر از دایره  $C_2$  که مماس بر دایره  $C_1$  باشد برابر ۲۴ باشد، مساحت ناحیه

بین دو دایره را حساب کنید.

(دیرستان نخبگان علامه طباطبائی خرداد ۹۸)



$$OH \perp AB \Rightarrow AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

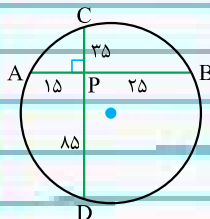
$$\Delta AHO: \hat{H} = 90^\circ \xrightarrow{\text{فیتاغورس}} OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow R_2^2 = 12^2 + R_1^2 \Rightarrow R_2^2 - R_1^2 = 144$$

$$\text{رنگی } S = S_2 - S_1 = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \pi(R_2^2 - R_1^2) = 144\pi$$

پاسخ:

۱۱. در شکل روبه‌رو دو وتر  $AB$  و  $CD$  بر هم عمودند. اندازه شعاع این دایره را حساب کنید.

(دیرستان واله خرداد ۱۴۰۰)

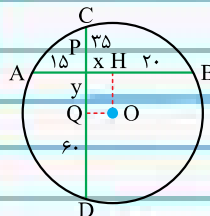


$$AB = AP + PB = 15 + 25 = 40$$

$$CD = CP + PD = 35 + 85 = 120$$

پاسخ:

از  $O$  به  $AB$  و  $CD$  عمود می‌کنیم.



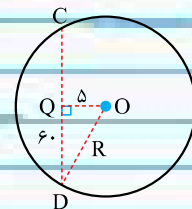
$$OH \perp AB \Rightarrow AH = HB = \frac{AB}{2} = 20$$

$$OQ \perp CD \Rightarrow CQ = QD = \frac{CD}{2} = 60$$

$$AP + PH + HB = AB \Rightarrow 15 + x + 20 = 40 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow OQ = 5$$

حالا  $OD$  را رسم می‌کنیم.

$$\Delta OQD: \hat{Q} = 90^\circ \xrightarrow{\text{فیتاغورس}} OD^2 = OQ^2 + QD^2 \Rightarrow R^2 = 5^2 + 60^2 \Rightarrow R^2 = 3625 \Rightarrow R = \sqrt{3625}$$





## یادداشت

A series of horizontal dashed lines spanning the width of the page, intended for writing notes.