درسنامه فصل ۱ (درس ۱)

۱- برای هر کدام از احکام زیر مثال نقض ارائه کنید.

الف) برای هر $x \in \mathbb{R}$؛ $x^3 > x^2$

ب) برای هر $x \in \mathbb{R}$؛ $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$

ج) اگر $a > b$ آنگاه $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

د) اگر $a < b$ آنگاه $a^2 < b^2$

۲- هر کدام از احکام زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) اگر A، B و C سه مجموعه باشند و داشته باشیم $A \cup C = A \cup B$ آنگاه $B = C$

ب) اگر A و B و C سه مجموعه باشند و داشته باشیم $A \cap B = A \cap C$ آنگاه $B = C$

د) اگر A و B و C سه مجموعه باشند و داشته باشیم $A - B = A - C$ آنگاه $B = C$

۳- هر کدام از احکام زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $n \neq 1$ عدد $2^n - 1$ اول است.

ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$ عدد $n^2 + n + 41$ عدد اول است.

ج) مجموع دو عدد اول، عددی اول است.

۴- آیا احکام زیر برقرار است؟

الف) برای هر دو عدد حقیقی x و y؛ $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y؛ $|x+y| = |x| + |y|$

ج) برای هر دو عدد حقیقی x و y؛ $[x+y] = [x] + [y]$

د) برای هر دو عدد حقیقی x و y؛ $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ $\quad x, y \neq 0$

و) برای هر دو عدد حقیقی x و y؛ $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

۵- ثابت کنید اگر $x \in \mathbb{Z}$ آنگاه $x^2 + x$ عددی زوج است.

۶- ثابت کنید اگر $x, y \in \mathbb{Z}$ آنگاه $xy(x+y)$ عددی زوج است.

۷- ثابت کنید اگر $x, y \in \mathbb{Z}$ آنگاه $xy(x-y)$ عددی زوج است.

۸- ثابت کنید اگر $x, y, z \in \mathbb{Z}$ آنگاه $(x-y)(y-z)(z-x)$ عددی زوج است.

۹- ثابت کنید دو گزاره زیر معادل هستند. $(a, b \in \mathbb{Z})$

p: $a + b$ زوج است $\qquad$ q: $3a + 5b$ زوج است

۱۰- ثابت کنید اگر $n \in \mathbb{Z}$ آنگاه زوج بودن n با زوج بودن n^2 همارز است.

۱۱- ثابت کنید ضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۳ می‌باشد.

۱۲- فرض کنید x,y دو عدد گویا باشند ثابت کنید اعداد زیر هم گویا هستند.

الف) $x + y$ $\qquad$ ب) $x - y$ $\qquad$ ج) xy $\qquad$ د) $\frac{x}{y}$ و $y \neq 0$

۱۳- اگر x و y دو عدد گویا باشند آیا x^y و x^x گویا هستند.

۱۴- درستی احکام زیر را به کمک برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر n^2 فرد باشد و $n \in \mathbb{Z}$ آنگاه n فرد است.

ب) اگر $n \in \mathbb{Z}$، n^2 زوج باشد، آنگاه n زوج است.

۱۵- ثابت کنید عدد فرد نمی‌توان یافت که مجموع معکوس آنها واحد شود.

۱۶- اگر x عددی گویا و y عدد گنگ باشد ثابت کنید اعداد زیر گنگ هستند.

الف) $x+y$ ب) $x-y$ ج) $y-x$

د) xy به شرط اینکه $x\neq ۰$ و) $\frac{x}{y}$ ل) $\frac{y}{x}$ و $x\neq ۰$

۱۷- اگر x,y گنگ باشند احکام زیر را با مثال نقض رد کنید.

الف) $x+y$ گنگ است. ب) $x+y$ گویا است.

ج) xy گنگ است. د) xy گویا است.

۱۸- اگر a و b و $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ عددهای گویا و مثبت باشند. ثابت کنید $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ نیز گویا می‌باشد.

۱۹- می‌دانیم $\sqrt{۲}$ گنگ است ثابت کنید $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ نیز گنگ است.

۲۰- نامساویهای زیر را به کمک روش بازگشتی ثابت کنید:

الف) $a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \qquad a>۰$ ب) $a+\frac{۱}{a}\leq -۲ \qquad a<۰$

ج) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲ \qquad (xy>۰)$ د) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq -۲ \qquad (xy<۰)$

۲۱- فرض کنید $a,b\in\mathbb{R}$ ثابت کنید:

الف) $a^۲+b^۲+ab\geq ۰$ ب) $a^۲+b^۲-ab\geq ۰$

۲۲- اگر $x,y,z\in\mathbb{R}$ ثابت کنید:

الف) $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+zx$ ب) $x^۲+y^۲+z^۲+۳\geq ۲(x+y+z)$

۲۳- اگر $a,b\in\mathbb{R}$ و $ab>۰$ ثابت کنید:

$$(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})\geq ۴$$

۲۴- اگر $a,b,c\in\mathbb{R}$ ثابت کنید:

$$a^۲+b^۲+c^۲\geq ۶-(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲})$$

۲۵- اگر $x,y\in\mathbb{R}$ ثابت کنید:

الف) $|x+y|\leq|x|+|y|$ ب) $|x-y|\leq|x|+|y|$

۲۶- اگر $a,b\in\mathbb{R}$ ثابت کنید:

$$(a^۲-b^۲)^۲\geq ۴ab(a-b)^۲$$

۲۷- اگر $a,b\in\mathbb{R}$ و $a,b>۰$ ثابت کنید:

$$\frac{a}{b^۲}+\frac{b}{a^۲}\geq\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

۲۸- اگر a و b و c و d چهار عدد حقیقی باشند ثابت کنید:

$$(ac+bd)^۲\leq(a^۲+b^۲)(c^۲+d^۲)$$

۲۹- اگر $x,y>۰$، ثابت کنید:

$$\frac{x+y}{۲}\geq\sqrt{xy}$$

۳۰- اگر $x,y\in\mathbb{R}$ و $x,y>۰$ ثابت کنید:

$$\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{۲}}\geq\frac{x+y}{۲}$$

درسنامه فصل ۱ (درس ۲)

۱- اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید:

ب) $a+b|a^3+b^3$ الف) $a-b|a^3-b^3$

۲- اگر $a|b$ و $c|d$ ثابت کنید $ac|bd$.

۳- اگر $a|b$ و $k\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید $a|b+ka$.

۴- اگر $m|a-b$ و ثابت کنید $m|ac-bd$.

۵- اگر $a-b|a$ ثابت کنید $a-b|b^2$.

۶- اگر $2|a+b$ ثابت کنید $2|a-b$.

۷- اگر $a^3|b^2$ ثابت کنید $a|b$

۸- اگر $a|b$ و $b^2|ac$ ثابت کنید:

ب) $a|c$ الف) $b|c$

۹- اگر $a^2|b^3$ آیا می‌توان ثابت کرد $a|b$؟

۱۰- اگر $xy|x+y$ ثابت کنید $|x|=|y|$.

۱۱- اگر $n\in\mathbb{Z}$ و $n-2|7$، n را بیابید.

۱۲- اگر $n\in\mathbb{Z}$ و $n-2|5n+1$، n را بیابید.

۱۳- به ازاء چند مقدار $n\in\mathbb{Z}$ داریم: $2n-1|7n+1$؟

۱۴- اگر $n\in\mathbb{Z}$ و $2n+1|n^2+3n$ آنگاه n چه عددی است؟

۱۵- اگر $d\in\mathbb{Z}$ و $d\neq 1$ و $d|5n+1$ و $d|4n+7$ آنگاه d عددی اول است؟

۱۶- ثابت کنید اگر $7|4x^2-1$ آنگاه $7|x^2-9$

۱۷- اگر $a+b+c+d=100$ و $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ و $\tau|a^3+b^3+c^3+d^3+r$. $0\leq r\leq 5$ باشد. مقدار r را بیابید.

۱۸- اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ و $4a-b$ مضرب $5a+3b$ باشد ثابت کنید $5a+3b|17a$

۱۹- روی منحنی $xy-2y-x=3$ چند نقطه با مختصات صحیح داریم.

۲۰- ثابت کنید اگر a عددی فرد باشد.

ب) $16|a^4-1$ الف) $8|a^2-1$

۲۱- اگر $5|4k+1$ و بتوان ثابت کرد $25|16k^2+mk+6$ و $0\leq k\leq 24$ باشد مقدار k را بیابید.

۲۲- اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ و $5|a+3b$ ثابت کنید $25|4a^2-ab+11b^2$

۲۳- اگر $a|b$ و $b|c$ حاصل $((a,c),b)$ کدام است؟

۲۴- حاصل عبارت $(n+2,n^2-4)$ را بیابید. $(n\in N)$

۲۵- اگر $a,b\in\mathbb{N}$ حاصل (a^3+b^3,a^2-ab+b^2) را بیابید.

۲۶- اگر $n\in\mathbb{Z}$ حاصل $(n^3-n,6)$ کدام است.

۲۷- اگر $n\in\mathbb{Z}$، عددی زوج باشد حاصل $(n^3-4n,48)$ کدام است؟

۲۸- اگر $a\in\mathbb{Z}$ حاصل $(7a-1,3a+4)$ چه اعدادی می‌تواند باشد.

۲۹- اگر $ax-by=1$ حاصل (a,b) چه عددی است؟

۳۰- اگر $x-y|x$ آنگاه حاصل (x,y) کدام است؟

۳۱- اگر $a|b$ و $a|c$ حاصل $[(a,b),(a,c)]$ کدام است؟

۳۲- اگر $a|7a+b$ حاصل $[a,b]$ را بیابید.

۳۳- اگر $a\in\mathbb{N}$ حاصل $[(a^3,a^5),[a^4,a^7]]$ را بیابید.

۳۴- فرض کنید $a|b$ حاصل $[24a^2b,48b^3]$ کدام است؟

۳۵- بزرگترین عدد طبیعی a را بیابید که باقیمانده تقسیم آن بر ۵۲، ۲ برابر مربع خارج قسمت باشد.

۳۶- در یک تقسیم به مقسوم ۲۰۰ واحد به مقسوم‌علیه ۳ واحد اضافه می‌کنیم خارج قسمت تغییر نکرده و از باقیمانده ۲۲ واحد کم می‌شود. خارج قسمت را بیابید.

۳۷- در یک تقسیم مقسوم ۷۱۹ و خارج قسمت ۲۳ می‌باشد. آنگاه مقسوم علیه چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

۳۸- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۴، باقیمانده $\frac{1}{12}$ مربع خارج قسمت است. مقدار $\max$ a کدام است؟

۳۹- در یک تقسیم، مقسوم ۲۴ برابر باقیمانده و باقی‌مانده حداکثر مقدار خود را دارا می‌باشد مقسوم کدام است. (اجزاء تقسیم طبیعی هستند.)

۴۰- باقیمانده a بر دو عدد ۷ و ۹ به ترتیب ۳، ۲ می‌باشد. باقیمانده a بر ۶۳ کدام است؟

۴۱- باقیمانده a و $2a$ بر عدد طبیعی b، بترتیب ۱۷ و ۹ می‌باشد. مقدار b را بیابید.

پاسخ فصل اول ـ درس اول

۱- الف) اگر $x=\frac{1}{2}$ آنگاه $x^3=\frac{1}{8}$ و $x^2=\frac{1}{4}$ است که $x^3<x^2$ است.

ب) اگر $x=0$ باشد آنگاه $\frac{1}{x}=\frac{1}{0}$ تعریف نشده است.

ج) اگر $a=3$ و $b=2$ آنگاه $\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$ که $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ است.

د) اگر $b=3$ ، $a=-4$ آنگاه $a^2=16$ و $b^2=9$ که $a^2>b^2$ است.

۲- الف) اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{3\}$ و $C=\{2\}$ آنگاه $A\bigcup B=A\bigcup C$ اما $B\neq C$

ب) $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{2,4\}$ و $C=\{2,5\}$ آنگاه $A\bigcap C=A\bigcap C$ اما $B\neq C$

ج) $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{2,5\}$ و $C=\{2,6\}$ آنگاه $A-C=A-B$ اما $B\neq C$

۳- الف) اگر $n=4$ آنگاه $2^4-1=15$ که اول نیست.

ب) اگر $x=41$ داریم $n^2+n+41=41^2+41+41=41\times 43$ که به ۴۱ بخش‌پذیر است و اول نیست.

ج) $3+5=8$ که جمعشان عدد اول نیست.

۴- الف) اگر $y=4$ و $x=4$ داریم $\sqrt{x+y}=\sqrt{8}$ اما $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ که با هم برابر نمی‌باشند.

ب) اگر $x=7$ و $y=-3$ داریم $|x+y|=4$ اما $|x|+|y|=10$ است.

ج) اگر $x=2/7$ و $y=1/7$ داریم $[x+y]=4$ اما $[x]+[y]=3$

د) اگر $x=2$ و $y=2$ داریم $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{4}$ اما $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

و) اگر $x=1$ و $y=-1$ داریم $(x+y)^2=0$ اما $x^2+y^2=2$

۵- می‌دانیم هر عدد صحیح یا زوج است و یا فرد. اما x و $x+1$ دو عدد متوالی هستند پس حتماً یک از آنها زوج و دیگری فرد است پس ضرب آنها زوج است. پس $x(x+1)$ همواره زوج است.

۶- مسئله را برای تمامی حالات بررسی می‌کنیم. اگر حداقل یکی از مقادیر x و y زوج باشد بدیهی است xy زوج است و $xy(x+y)$ هم زوج می‌شود.

حال اگر x و y هر دو فرد باشد، می‌دانیم $x+y$ زوج است پس $xy(x+y)$ هم زوج می‌شود.

۷- اگر حداقل یکی از مقادیر x و y زوج باشد، بدیهی است که xy زوج است و $xy(x-y)$ هم زوج می‌شود. حال اگر x و y هر دو فرد باشند، می‌دانیم $x-y$ زوج است پس $xy(x-y)$ هم زوج می‌شود.

۸- اگر $x-y=a$ و $y-z=b$ داریم: $a-b=x-y-y+z=z-x$

پس $(x-y)(y-z)(z-x)=ab(a-b)$ که همان مسئله ۷ می‌باشد.

۹- می‌دانیم $3a+5b=3(a+b)+2b$. اگر $a+b$ زوج باشد بدیهی است $3(a+b)$ هم زوج است و چون $2b$ عدد زوج است پس مجموع آنها یعنی $5b+3a=3(a+b)+2b$ هم زوج است. حال فرض کنید $3a+5b$ زوج باشد. اگر از آن عدد زوج $2b$ را کم کنیم باز زوج است پس $3a+5b-2b=3(a+b)$ هم زوج است. اما زمانی $3(a+b)$ زوج است که خود $a+b$ هم زوج باشد. پس زوج بودن $a+b$ و $3a+5b$ معادل هم هستند.

۱۰- اگر $n \in \mathbb{Z}$ و n زوج باشد آنگاه $n = ۲k$ و $n^۲ = ۴k^۲$ که عددی زوج است حال فرض کنید $n^۲$ و $n \in \mathbb{Z}$ عددی زوج باشد. ثابت می‌کنیم خود n نیز، زوج است.

برهان خلف: فرض n زوج نباشد پس n عددی فرد است و $n = ۲k + ۱$

$$\Rightarrow n^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۲\underbrace{(۲k^۲ + ۲k)}_{q} + ۱ = ۲q + ۱$$

یعنی $n^۲$ فرد است که خلاف فرض است. پس ثابت شد که n زوج است پس زوج بودن n، همارز زوج بودن $n^۲$ است.

۱۱- می‌دانیم از سه عدد متوالی یکی مضرب ۳ است. پس حاصلضرب آنها مضرب ۳ می‌باشد.

۱۲- الف) فرض کنید $x, y \in Q$ باشد پس

$$\begin{array}{ll} x = \dfrac{a}{b} & a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰ \\ y = \dfrac{c}{d} & c, d \in \mathbb{Z}, d \neq ۰ \end{array} \Rightarrow x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

چون صورت و مخرج کسر عدد صحیح هستند و $bd \neq ۰$ پس $x + y$ عدد گویا است.

ب) فرض کنید $x, y \in Q$ پس

$$\begin{array}{ll} x = \dfrac{a}{b} & a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰ \\ y = \dfrac{c}{d} & c, d \in \mathbb{Z}, d \neq ۰ \end{array} \Rightarrow x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

چون صورت و مخرج کسر عدد صحیح هستند. $bd \neq ۰$ پس $x - y$ عدد گویا است.

ج) فرض کنید $x, y \in Q$ پس

$$\begin{array}{ll} x = \dfrac{a}{b} & a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰ \\ y = \dfrac{c}{d} & c, d \in \mathbb{Z}, d \neq ۰ \end{array} \Rightarrow xy = \frac{ac}{bd}$$

چون $ac \in \mathbb{Z}$ و $bd \in \mathbb{Z}$ و $bd \neq ۰$ پس xy عدد گویا است.

د) فرض کنید $x, y \in Q$ پس

$$\begin{array}{ll} x = \dfrac{a}{b} & a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰ \\ y = \dfrac{c}{d} & c, d \in \mathbb{Z}, d \neq ۰ \end{array} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

$ad \in \mathbb{Z}$ شش و $bc \in \mathbb{Z}$ و بدیهی است $bc \neq ۰$ پس $\dfrac{x}{y}$ عدد گویا می‌باشد.

۱۳- خیر. با مثال نقض حکم را رو می‌کنیم اگر $x = ۲$ و $y = \dfrac{۱}{۲}$. x و y هر دو گویا هستند اما $x^y = ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲}$ که گنگ است.

اگر $x = \dfrac{۱}{۲}$ و x و عدد گویا است اما $x^x = (\dfrac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\dfrac{۱}{۲}}$ عدد گنگ می‌باشد.

۱۴- الف) برهان خلف: فرض کنید n فرد نباشد پس n عدد زوج است.

$n = ۲k \Rightarrow n^۲ = ۴k^۲ \Rightarrow$ $n^۲$ زوج است

که خلاف فرض است. پس n عددی فرد می‌باشد.

ب) برهان خلف: فرض n زوج نباشد پس n عددی فرد است.

$$n=2k+1 \rightarrow n^2=4k^2+4k+1=2\underbrace{(2k^2+2k)}_{q}+1=2q+1 \Rightarrow$$ فرد است n^2

که خلاف فرض است پس n عددی زوج است.

۱۵- فرض کنید a و b و c و d چهار عدد فرد باشند که مجموع معکوس آنها یک باشد

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1 \xrightarrow{\times abcd} bcd+acd+abd+abc=abcd$$

می‌دانیم ضرب اعداد فرد، فرد است. پس سمت چپ تساوی بالا جمع ۴ عدد فرد است که حاصل عدد زوج می‌شود. اما سمت راست abcd ضرب ۴ عدد فرد است که عددی فرد می‌باشد پس سمت چپ زوج و سمت راست فرد است که نمی‌تواند با هم برابر باشد که به تناقض رسیدیم. پس نمی‌تواند این اعداد وجود داشته باشد.

۱۶- الف) فرض کنید x گویا و y گنگ باشد.

برهان خلف: اگر $x+y$ گنگ نباشد پس عدد گویا است.

$$x+y=r \quad \text{که} \quad r\in Q \Rightarrow y=r-x$$

r گویا و x گویا پس $r-x$ گویا است. پس y گویا است که خلاف فرض است.

ب) فرض کنید x گویا و y گنگ باشد.

برهان خلف: اگر $x-y$ گنگ نباشد پس عددی گویا است.

$$x-y=r \quad \text{که} \quad r\in Q \Rightarrow y=x-r$$

x و r هر دو گویا هستند پس تفاضل آنها هم گویا است پس y عددی گویا است که خلاف فرض است.

ج) مانند قسمت ب اثبات می‌شود.

د) فرض $x\neq 0$ گویا و y گنگ باشد.

برهان خلف: فرض کنید xy گنگ نباشد پس عددی گویا است.

$$xy=r \quad \text{که} \quad r\in Q \Rightarrow y=\frac{r}{x}$$

r گویا و $x\neq 0$ گویا پس $\frac{r}{x}$ هم عددی گویا است. یعنی y گویا است که خلاف فرض است.

و) فرض x گویا و y گنگ باشد.

برهان خلف: اگر $\frac{x}{y}$ گنگ نباشد پس عددی گویا است

$$\frac{x}{y}=r \quad \text{که} \quad r\in Q \Rightarrow y=\frac{x}{r}$$

r گویا و x گویا پس $\frac{x}{r}$ گویا است یعنی y گویا است که خلاف فرض است

ل) مانند قسمت (و) ثابت می‌شود.

۱۷- الف) فرض کنید $x=\sqrt{2}$ و $y=1-\sqrt{2}$، x و y هر دو گنگ هستند اما $x+y=1$ که عددی گویا است.

ب) اگر $x=\sqrt{2}-1$ و $y=\sqrt{2}+1$. x و y هر دو گنگ هستند اما $x+y=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ که عددی گنگ است.

ج) اگر $x=\sqrt{2}$ و $y=\sqrt{8}$. x و y هر دو گنگ هستند اما $xy=4$ که عددی گویا است.

د) اگر $x=\sqrt{3}$ و $y=\sqrt{2}$ هر دو عدد x و y گنگ هستند اما $xy=\sqrt{6}$ که عددی گنگ است.

۱۸- می‌دانیم $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$ پس $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ a و b اعداد گویا هستند پس $a-b$ گویا است و $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ هم گویا است پس تقسیم آنها هم گویا است پس $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ عددی گویا است و در نتیجه $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ عددی گویا می‌باشد.

اما داریم:

$$\sqrt{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

$$\sqrt{b}=\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

پس $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ که جمع و تفاضل دو عدد گویا هستند گویا می‌باشند.

۱۹- **برهان خلف:** فرض کنید $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ گنگ نباشد. پس عددی گویا است.

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=r \text{ که } r\in Q \Rightarrow \sqrt{3}=r-\sqrt{2}\xrightarrow{\text{توان ۲}} 3=r^2+2-2\sqrt{2}r\Rightarrow \sqrt{2}=\frac{r^2-1}{2r}$$

دقت که چون r گویا است پس صورت مخرج کسر بالا، اعداد گویا می‌باشد پس $\frac{r^2-1}{2r}$ عددی گویا است و $\sqrt{2}$ عددی گویا می‌شود که خلاف فرض است.

۲۰-

الف) $a+\frac{1}{a}\ge 2\overset{a>0}{\underset{\times a}{\Leftrightarrow}} a^2+1\ge 2a\Leftrightarrow a^2-2a+1\ge 0\Leftrightarrow (a-1)^2\ge 0$ که به یک اصل بدیهی رسیدیم.

ب) $a+\frac{1}{a}\le -2\overset{a<0}{\underset{\times a}{\Leftrightarrow}} a^2+1\ge -2a\Leftrightarrow a^2+2a+1\ge 0\Leftrightarrow (a+1)^2\ge 0$ که به یک اصل بدیهی رسیدیم.

ج) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2\overset{xy>0}{\underset{\times xy}{\Leftrightarrow}} x^2+y^2\ge 2xy\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$ که به یک اصل بدیهی رسیدیم.

د) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\le -2\overset{xy<0}{\underset{\times xy}{\Leftrightarrow}} x^2+y^2\ge -2xy\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\ge 0\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 0$ که به یک اصل بدیهی رسیدیم.

۲۱- الف) $a^2+b^2+ab\ge 0\overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2a^2+2b^2+2ab\ge 0\Leftrightarrow (a+b)^2+a^2+b^2\ge 0$

جمع سه عبارت نامنفی، همواره نامنفی است.

ب) $a^2+b^2-ab\ge 0\overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2a^2+2b^2-2ab\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2+a^2+b^2\ge 0$

که به یک اصل بدیهی رسیدیم. چون جمع سه عبارت نامنفی، همواره نامنفی است.

۲۲- الف) $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx\overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x^2+2y^2+2z^2\ge 2xy+2yz+2xz$

$\Leftrightarrow x^2+x^2+y^2+y^2+z^2+z^2-2xy-2yz-2xz\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$

که به یک اصل بدیهی رسیدیم.

ب) $x^2+y^2+z^2+3\geq 2(x+y+z) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+1+1+1\geq 2x+2y+2z$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\geq 0$

که به یک اصل بدیهی رسیدیم

-۲۳

$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4 \overset{ab>0}{\Leftrightarrow} 1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\geq 4 \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\geq 0 \overset{\times ab}{\Leftrightarrow} a^2-b^2-2ab\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$$

که به یک اصل بدیهی رسیدیم.

-۲۴

$$a^2+b^2+c^2\geq 6-(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}) \Leftrightarrow a^2+\frac{1}{a^2}-2+b^2+\frac{1}{b^2}-2+c^2+\frac{1}{c^2}-2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-\frac{1}{a})^2+(b-\frac{1}{b})^2+(c-\frac{1}{c})^2\geq 0$$

که به یک اصل بدیهی رسیدیم.

-۲۵

الف) $|x+y|\leq |x|+|y| \xleftrightarrow[\text{مثبت است دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}]{\text{چون دو طرف نامساوی}} |x+y|^2\leq (|x|+|y|)^2$

$\Leftrightarrow (x+y)^2\leq |x|^2+|y|^2+2|x||y| \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy\leq x^2+y^2+2|xy| \Leftrightarrow xy\leq |xy|$

دقت کنید نامساوی $|xy|\geq xy$ همواره برقرار است.

ب) $|x-y|\leq |x|+|y|$

چون دو طرف نامساوی مثبت است. دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم

$|x-y|\leq |x|+|y| \Leftrightarrow (|x-y|)^2\leq (|x|+|y|)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\leq x^2+y^2+2|xy|$

$\Leftrightarrow -xy\leq |xy|$

دقت کنید نامساوی $|xy|\geq -xy$ همواره برقرار است.

-۲۶ $(a^2-b^2)^2\geq 4ab(a-b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)^2-4ab(a-b)^2\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2((a+b)^2-4ab)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2+b^2+2ab-4ab)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a-b)^2\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^4\geq 0$

که نامساوی آخر همواره برقرار است.

-۲۷ $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a^3+b^3}{a^2b^2}\geq \frac{a+b}{ab}$

$\underset{\times ab}{\overset{ab>0}{\Leftrightarrow}} a^3+b^3\geq ab(a+b)$

$\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)\geq 0$