

۲, -۱, -۴, -۷, ...

۱- مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی روبرو را بیابید.

۵, ۸, ۱۱, ...

۲- مجموع جملات دنباله روبرو چقدر است؟

۳- در دنباله ۲, ۶, ۱۰, ... مجموع چند جمله ۲۰۰ می‌شود؟

-۱, ۱, ۳, ...

۴- در دنباله حسابی مقابل حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل از ۹۶ بیشتر شود؟

۵- روی محیط دایره‌ای ۳۰ نقطه متمایز قرار دارد. تعداد کل وترهای متمایزی که از وصل کردن این ۳۰ نقطه بدست می‌آیند را بیابید.

۶- مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $S_n = 2n^2 - 3n$ می‌باشد.

الف) قدر نسبت این دنباله چقدر است؟

ب) جمله دهم این دنباله را بیابید.

۷- در دنباله هندسی ۸, ۱۶, ۳۲, ... مجموع ۱۰ جمله اول را بیابید.

۸- مجموع چند جمله از دنباله -۲, ۴, -۸, ... برابر ۶۸۲ می‌شود؟

۹- تویی را از زمین به سمت بالا پرتاب می‌کنیم، اگر حداکثر ارتفاع توپ ۶ متر باشد و پس از هر بار برخورد با زمین $\frac{1}{4}$ مرحله قبل بالا بیاید، اندازی مسیری را که توپ در دهمین برخورد می‌پیماید را بیابید.

۱۰- در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله اول ۱۱۲ و مجموع شش جمله اول ۱۲۶ است، قدر نسبت این تصاعد را حساب کنید.

۱۱- در یک دنباله حسابی $S_n - S_{n-1} = 2n + 3$ ، مجموع ۲۰ جمله اول چقدر است؟

۱۲- در یک دنباله هندسی $S_{17} = 73 \cdot S_7$ قدر نسبت دنباله را بیابید.

۱- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

الف) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

ب) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

۲- اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 7x + 1 = 0$ باشند مقدار عددی $(\alpha - \beta)^2$ را بیابید.

۳- اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 + 5x + 8 = 0$ باشند، بدون حل معادله مقدار عددی $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$ را بیابید.

۴- مقدار m چنان بیابید که یکی از ریشه‌های معادله $4x^2 - 16x + m = 0$ دو واحد بیشتر از ریشه دیگر باشد.

۵- مقدار m چقدر باشد تا در معادله $2x^2 + mx - 3 = 0$ مجموع ریشه‌ها ۳ برابر حاصل ضرب ریشه‌ها باشد.

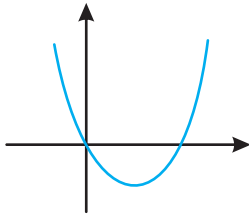
۶- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - (n+2)x + n + 1 = 0$ باشند، مقدار n را چنان بیابید که رابطه زیر میان ریشه‌ها برقرار

باشد. $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{5}{6}$

۷- شکل روبرو نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ می‌باشد،

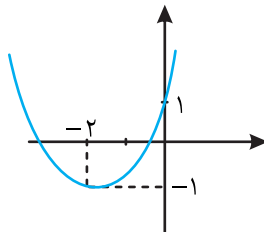
الف) مقدار c را بیابید.

ب) علامت a و b را تعیین کنید.



۸- در شکل مقابل نمودار سهمی $p(x) = ax^2 + bx + c$ رسم

شده است. ضرایب a و b و c را تعیین کنید.



۹- میانگین صفرهای تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ برابر $\frac{n}{4}$ می‌باشد، مقدار n و مینیمم تابع f چقدر است؟

۱۰- فاصله رأس سهمی $y = x^2 + 2x + \sqrt{2}$ را از محور طول‌ها بیابید.

۱۱- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $3 + 2\sqrt{2}$ و $\frac{1}{3 + \sqrt{8}}$ باشند.

۱۲- مقدار k را چنان بیابید که یکی از ریشه‌های معادله $kx^2 + 6x + k = 0$ ، پنج برابر ریشه دیگر باشد.

۱۳- محیط یک زمین به شکل مستطیل ۳۴ متر و مساحت آن ۶۰ متر مربع است. اندازه طول و عرض این زمین را بیابید.

۱۴- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $(x^2 - \frac{1}{4})^2 + 5(x^2 - \frac{1}{4}) + 4 = 0$

ب) $3(x + \frac{1}{x})^2 + 9(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$

$\frac{b^2}{ac} = \frac{(n+1)^2}{n}$

۱۵- در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ یک ریشه n برابر ریشه دیگر است. ثابت کنید:

۱- جواب معادله $\frac{x+4}{x+1} + \frac{3}{x+3} = 5$ برابر است با

۲- معادله $\frac{5}{x+2} - \frac{4}{x(x+2)} = \frac{x-2}{x}$ را حل کنید.

$$\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8} = \frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{4}$$

۳- معادله مقابل را حل کنید.

$$\frac{x+a}{x-a} - 1 = \frac{x-1}{a+1}$$

۴- مقدار a را چنان بیابید که $x=1$ جواب معادله مقابل باشد.

۵- به ازای چه مقداری از n دو کسر $\frac{2n-1}{n+1}$ و $\frac{2n+1}{n+\frac{1}{2}}$ معکوس یکدیگرند؟

۶- جواب معادله $2 + \sqrt{x+7} = x+3$ برابر است با

۷- هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $\sqrt{x-4} = x-10$

(ب) $\sqrt{x^2-1} + 5\sqrt{x} = 0$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{5x-3} + 4 = 0$$

۸- بدون حل معادله مقابل نشان دهید مجموعه جواب آن تهی است.

۹- معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف) $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = x-1$

(ب) $\sqrt{x+\sqrt{x-2}} - \sqrt{2x-2} = 0$

۱۰- معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف) $\sqrt{x-5} - \frac{3}{\sqrt{x-5}} = 2$

(ب) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{6}{5}$

$$|ab| = |a||b|$$

۱- به فرض آنکه a و b دو عدد حقیقی باشند نشان دهید:

$$|x-y| \geq |x|-|y|$$

۲- ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی x و y نامساوی مقابل برقرار است.

۳- اگر $x \leq 1$ باشد، ضابطه $f(x) = |x-3| + |x-1|$ بدون استفاده از قدر مطلق برابر است با ...

۴- به کمک تعیین علامت ابتدا ضابطه $y = |x+1| + |x-1|$ را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید، سپس نمودار آن را رسم کنید.

۵- معادله $||x|-3|=4$ را حل کنید.

$$\sqrt{(x-2)^2} = |2x+3|$$

۶- معادله مقابل را حل کنید.

$$y = |x^2 + 2x - 2|$$

۷- نمودار تابع مقابل را رسم کنید.

۸- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $|4x-1| < 3$

ب) $|x+2| < 5x$

ج) $|x+3| \geq |x-1|$

۹- معادله $|x-1| = (x-2)^2 + 1$ را به روش هندسی حل کنید.

$$\sqrt{1-x} + 2x = x^2 + 1$$

۱۰- معادله مقابل را به روش هندسی و جبری حل کنید.

۱۱- نامعادله $|1-x^2| \geq |1+x|^2$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

۱۲- نمودار هر یک از روابط زیر را رسم کنید.

الف) $|x| + |y| = 1$

ب) $|x| - |y| = 1$

۱- نقاط $A(-3, 3)$ و $B(5, 1)$ مفروضند.

الف) مختصات نقطه M وسط AB را بیابید.

ب) فاصله نقطه M را از مبدأ مختصات حساب کنید.

۲- مختصات سه رأس مثلث عبارتند از: $A(0, 5)$ و $B(5, -2)$ و $C(0, 0)$

الف) طول میانه CM را بدست آورید.

ب) مساحت مثلث را حساب کنید.

۳- فاصله نقطه $M(1, 1)$ از محل برخورد دو خط $2x - y = 3$ و $y = x$ چقدر است؟

۴- اگر $O(0, 0)$ و $A(3, -3)$ و $B(2, 2)$ سه رأس مثلث باشند نشان دهید مثلث در رأس O قائمه است.

۵- دو نقطه $A(4, 2)$ و $B(-1, -1)$ مفروضند، معادله عمود منصف AB را بنویسید.

۶- نقاط $A(1, 1)$ و $B(0, 3)$ و $C(5, 5)$ سه رأس مثلث ABC هستند، اندازه ارتفاع وارد بر ضلع BC را حساب کنید.

۷- به ازای چه مقدار a فاصله مبدا مختصات از خط $3x - 4y = 2a - 1$ برابر ۵ است؟

پاسخ فصل اول (درس ۱)

-۱

$$a = 2 \quad d = -3 \quad n = 20 \quad S_{r_0} = ?$$

$$S_n = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2} \Rightarrow S_{r_0} = \frac{20[2 \times 2 + 19 \times (-3)]}{2} = -530$$

$$a = 5, a_n = 122, d = 3$$

-۲ دنباله حسابی

$$a_n = a + (n-1)d = 5 + (n-1)(3) = 122 \Rightarrow 3(n-1) = 117 \Rightarrow n = 40$$

$$S_n = \frac{n(a + a_n)}{2} \Rightarrow S_{r_0} = \frac{40(5 + 122)}{2} = 2540$$

-۳

$$a = 2, d = 4, n = ?, S_n = 200$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \Rightarrow \frac{n}{2}[4 + (n-1) \times 4] = 200 \Rightarrow n[4 + 4n - 4] = 400 \Rightarrow 4n^2 = 400 \Rightarrow n = 10$$

-۴

$$a = -1 \quad d = 2 \quad n = ? \quad S_n > 120$$

$$\frac{n}{2}[2a + (n-1)d] > 120 \Rightarrow \frac{n}{2}[-2 + (n-1)(2)] > 120 \Rightarrow \frac{n}{2}(2n - 4) > 120 \Rightarrow n^2 - 2n - 120 > 0$$

$$(n-12)(n+10) > 0 \Rightarrow n-12 > 0 \Rightarrow n > 12 \Rightarrow n = 13$$

همواره مثبت است

-۵ از اتصال نقطه اول به ۳۰ نقطه دیگر ۲۹ وتر به وجود می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر ۲۸ وتر به وجود می‌آید، اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، مجموع تعداد وترها برابر است با:

$$29 + 28 + \dots + 2 + 1 = \frac{29 \times (29 + 1)}{2} = 2950$$

ترتیب ادامه دهیم، مجموع تعداد وترها برابر است با:

$$a = S_1 = 2(1) - 3(1) = -1$$

-۶ الف)

$$a_1 + a_r = S_r \Rightarrow -1 + a_r = 2(2)^r - 3(2)^r = 2 \Rightarrow a_r = 2 + 1 = 3 \Rightarrow d = a_r - a_1 = 3 - (-1) = 4$$

$$a_{10} = a + 9d = -1 + 9(4) = 35$$

ب)

-۷

$$a = 8, q = 2, n = 10$$

$$S_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = 8 \times \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 8(1024 - 1) = 8184$$

-۸

$$a = -2 \quad q = -2 \quad n = ? \quad S_n = 682$$

$$(-2) \times \frac{(-2)^n - 1}{-2 - 1} = 682 \Rightarrow (-2)^n - 1 = \frac{682 \times 3}{2} \Rightarrow (-2)^n - 1 = 1023 \Rightarrow (-2)^n = 1024 = 2^{10} \Rightarrow n = 10$$

$$\begin{matrix} \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 2 \times 6 & \frac{1}{4}(2 \times 6) & (\frac{1}{4})^2(2 \times 6) & \dots \end{matrix}$$

بنابراین مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی با جمله اول ۱۲ و قدر نسبت $\frac{1}{4}$ را می‌یابیم.

$$12 \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^{10}}{1 - \frac{1}{4}} = 12 \times \frac{4}{3} (1 - \frac{1}{4^{10}}) = 16(1 - \frac{1}{4^{10}}) = 16 - \frac{1}{4^{10}} \approx 16 \text{ متر}$$

-۱۰

$$\left. \begin{matrix} a. \frac{q^r - 1}{q - 1} = 112 \\ a. \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 126 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{تقسیم طرفین} \\ \Rightarrow \frac{q^6 - 1}{q^r - 1} = \frac{126}{112} \Rightarrow \frac{(q^r - 1)(q^r + 1)}{q^r - 1} = \frac{63}{56} \Rightarrow q^r + 1 = \frac{63}{56} \Rightarrow q^r = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

-۱۱

$$s_n - s_{n-1} = a_n = 2n + 3 \Rightarrow s_{r_0} = \frac{r_0}{2} (a_1 + a_{r_0}) = 10(5 + 43) = 480$$

-۱۲

$$a \frac{q^{1r} - 1}{q - 1} = 73 \cdot a \frac{q^6 - 1}{q - 1} \Rightarrow \frac{q^{1r} - 1}{q^6 - 1} = 73 \Rightarrow \frac{(q^r - 1)(q^r + 1)}{q^6 - 1} = 73 \Rightarrow q^r + 1 = 73 \Rightarrow q^r = 72 = 3^2 \Rightarrow q \pm 3$$

پاسخ فصل اول (درس ۲)

-۱

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -5 \quad p = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 2$$

$$\alpha^r \beta + \alpha \beta^r = \alpha \beta (\alpha^r + \beta^r) = P(S^r - 2P) = 2(25 - 2(2)) = 42 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\alpha^r + \beta^r}{\alpha \beta} = \frac{S^r - 2PS}{P} = \frac{(-5)^r - 2(2)(-5)}{2} = \frac{-125 + 20}{2} = \frac{-95}{2} \quad (\text{ب})$$

-۲

$$S = \frac{7}{4}, P = \frac{1}{4}$$

$$(\alpha - \beta)^r = \alpha^r + \beta^r - 2\alpha\beta = (S^r - 2P) - 2P = S^r - 4P = \frac{49}{16} - 1 = \frac{33}{16}$$

$$S = \frac{-5}{2}, P = 4$$

-۳

$$A = \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} \Rightarrow A^r = \alpha^r\beta + r\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} + \alpha\beta^r$$

$$A^r = \alpha\beta[\alpha + \beta + r\sqrt{\alpha\beta}] = P[S + r\sqrt{P}] = r\left(-\frac{\Delta}{r} + r \times r\right) = 6$$

-۴

$$\alpha = \beta + r \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = r \\ \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 1$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 3 \times 1 = \frac{m}{r} \Rightarrow m = 12$$

-۵

$$\alpha + \beta = r\alpha\beta \Rightarrow \frac{-m}{r} = r \frac{(-r)}{r} \Rightarrow m = 9$$

-۶

$$\frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha+\beta+r}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1} = \frac{\Delta}{r} \Rightarrow \frac{S+r}{P+S+1} = \frac{\Delta}{r}$$

$$S = n+r, P = n+1 \Rightarrow \frac{n+r+r}{n+1+n+r+1} = \frac{\Delta}{r} \Rightarrow \frac{n+r}{2n+r} = \frac{\Delta}{r} \Rightarrow 1 \cdot n + r = \Delta n + r \Delta \Rightarrow r n = \Delta \Rightarrow n = 1$$

$$f(\circ) = c \Rightarrow c = \circ$$

(الف) -۷

(ب) تابع دارای Min است بنابراین $a > 0$ و چون دو ریشه یکی مثبت و دیگری صفر است پس مجموع ریشه‌ها یعنی $\frac{-b}{a}$ مثبت است.

$$\frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow b < 0$$

-۸

$$f(\circ) = c \Rightarrow c = 1$$

$$\frac{-b}{ra} = -2 \Rightarrow b = 2a$$

$$f(-2) = -1 \Rightarrow a(-2)^r + b(-2) + c = -1 \Rightarrow 4a - 2b + 1 = -1 \Rightarrow 4a - 2b = -2 \Rightarrow b - 2b = -2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

-۹

$$\frac{\alpha+\beta}{r} = \frac{n}{r} \Rightarrow \frac{S}{r} = \frac{n}{r} \Rightarrow \frac{r}{r} = \frac{n}{r} \Rightarrow n = r$$

$$\text{Min}(f) = \frac{-b}{ra} = \frac{-b}{r} = \frac{\alpha+\beta}{r} = \frac{r}{r} = 2$$