در ترسیم‌های زیر از خط‌کش و پرگار استفاده می‌شود.
۱) رسم عمود منصف یک پاره‌خط
۲) رسم نیمساز یک زاویه
۳) رسم خط موازی یک خط داده شده
۴) رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه روی خط و یا بیرون خط
۵) رسم خط موازی یک خط از یک نقطه خارج خط
۶) رسم مثلث با داشتن سه ضلع آن
۷) رسم مربع، متوازی‌الاضلاع و لوزی که اندازه قطرهای آن معلوم است.

۱- دایره را تعریف کنید.

۲- عمود منصف یک پاره‌خط را تعریف کرده و یک ویژگی آن را ذکر کنید.

۳- نیمساز یک زاویه را تعریف کنید و یک ویژگی آن را ذکر کنید.

۴- عبارات زیر را با نوشتن کلمه و یا عبارت مناسب کامل کنید.

الف) اگر نقطه‌ای روی عمود منصف یک پاره‌خط باشد از دو سر آن به .... است.

ب) به طول ضلع ۵ و قطر ۱۲ سانتی‌متر .... لوزی می‌توان رسم کرد.

ج) به قطر ۷cm به تعداد .... مربع می‌توان رسم کرد.

د) اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد فاصله آن از دو ضلع زاویه .... است.

۵- چگونه می‌توان مثلثی به ضلع‌های ۲، ۳ و ۴ سانتی‌متر رسم کرد؟

۶- آیا می‌توان با روش سؤال بالا مثلثی به ضلع‌های ۵، ۷ و ۲ سانتی‌متر رسم کرد؟ چرا؟

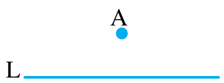
۷- چگونه مرکز یک دایره را با استفاده از خط‌کش و پرگار به دست می‌آورید؟

۸- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهایش ۳ و ۴ سانتی‌متر باشد. (روش رسم را توضیح دهید.)

۹- مربعی رسم کنید که طول قطر آن **۵cm** باشد.

۱۰- مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن **۵cm** باشد.

۱۱- یک خط و یک نقطه خارج آن داده شده است. از آن نقطه خطی موازی خط داده شده رسم کنید.



«سؤالات تستی»

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۱۲ـ می‌دانیم چند ضلعی که قطرهایش منصف یکدیگر باشند متوازی‌الاضلاع است، چند متوازی‌الاضلاع با طول قطرهای ۷/۵ واحد می‌توان رسم کرد.

الف) هیچ ب) ۱ ج) ۲ د) بی‌شمار

۱۳ـ اگر مثلثی در رأس **A** قائم‌الزاویه باشد نقطه‌ای که روی محیط مثلث قرار داشته و فاصله آن از رأس **A** و ضلع **BC** برابر است، .... است.

الف) روی نیمساز یکی از زاویه‌های مثلث ب) روی عمود منصف

ج) محل برخورد سه میانه مثلث است. د) روی میانه مثلث

۱۴- چند نقطه درون هر مثلث دلخواه وجود دارد که فاصله آن از سه ضلع مثلث به یک اندازه باشد؟

الف) صفر ب) بی‌شمار ج) ۱ د) ۳

۱۵- در رسم عمود منصف یک پاره‌خط به ضلع **m** دهانه پرگار را به اندازهٔ شعاع .... باز می‌کنیم.

الف) $R = m$ ب) $R > \frac{m}{2}$ ج) $R < \frac{m}{2}$ د) $R = \frac{m}{2}$

۱۶- درون هر مثلث متساوی‌الاضلاع چند نقطه وجود دارد که فاصله آن از سه رأس مثلث به یک اندازه باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) بی‌شمار د) وجود ندارد.

۱- انواع روش‌های استدلال را نام ببرید و آنها را توضیح دهید.

۲- کدام‌یک از عبارات زیر گزاره است؟

الف) تهران مرکز ایران است. ب) حافظ یک نویسنده است. ج) به به چه جالب! د) ۲۵ عددی صحیح است.

هـ) مثلث سه ضلع دارد. و) آیا فردا هوا بارانی است؟ ز) درست را بخوان.

۳- عبارات زیر را با نوشتن عبارت مناسب کامل کنید.

الف) نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آید .... نامیده می‌شود.

ب) اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود .... گفته می‌شود.

ج) .... یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد.

د) نام دیگر برهان غیرمستقیم .... است.

هـ) اگر یک قضیه و عکس آن هر دو درست باشد آن قضیه را .... می‌گویند.

۴- نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

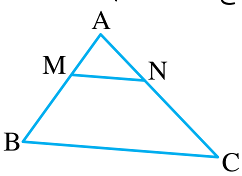
الف) مجموع زوایای خارجی مثلث ۳۶۰ درجه است. ب) $\sqrt{۳}$ گنگ است.

ج) a بزرگتر از b است. د) عدد ۵۱ فرد است.

۵- عکس قضیه‌های زیر را بنویسید.

الف) اگر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشد آن گاه قطرهایش همدیگر را نصف می‌کنند.

ب) اگر در مثلثی پاره خطی موازی یکی از ضلع‌ها رسم کنیم تا دو ضلع دیگر را در دو نقطه M و N قطع کند آنگاه پاره‌خط‌های به وجود آمده روی دو ضلع با هم متناسبند.



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

ج) اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد، آنگاه بین سه ضلع a و b و c در آن رابطه زیر برقرار است.

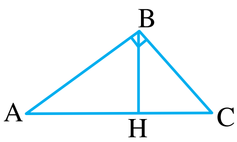
$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$$

د) اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع مقابل به زاویه کوچکتر

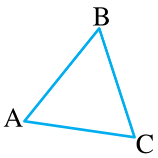
۶- عکس قضیه زیر را بنویسید و بگوئید آیا عکس آن نیز درست است یا خیر؟ چرا؟

قضیه: اگر در دو مثلث اندازه سه ضلع برابر باشند، آن‌گاه اندازه سه زاویه آنها نیز برابرند.

۷- برای استدلال به روش برهان خلف چه مراحلی را طی می‌کنیم.



۸- در شکل زیر $\hat{B} = ۹۰^\circ$ و $\hat{B}_۱ \neq A$ است به کمک برهان خلف ثابت کنید که BH نمی‌تواند بر AC عمود شود.



۹- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلثی $AB \neq BC$ باشد آنگاه $\hat{A} \neq \hat{C}$ است.

۱۰- با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(n-۲)\times ۱۸۰$

۱۱- با استدلال استنتاجی ثابت کنید سه عمود منصف اضلاع هر مثلث همرس‌اند.

۱۲- با استدلال استنتاجی ثابت کنید، سه ارتفاع مثلث همرس‌اند.

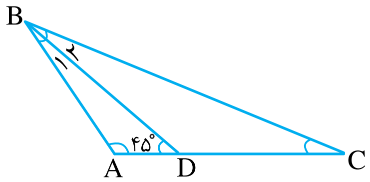
۱۳- ثابت کنید نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث همرس‌اند.

۱۴- قضیه ثابت کنید: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر.

۱۵- عکس قضیه بالا ثابت کنید: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع مقابل به زاویه کوچکتر.

۱۶- در چهارضلعی ABCD بزرگترین ضلع DC و کوچکترین ضلع AB می‌باشد ثابت کنید: $\hat{D} < \hat{B}$

۱۷- در شکل مقابل BD نیمساز زاویه $\hat{B}$ است ثابت کنید. $\hat{B} < 90^\circ$



۱۸- گزاره‌های زیر را به صورت شرطی بنویسید و سپس تعیین کنید عکس آنها شرطی است یا نه؟ در صورتی که یک قضیه نباشد یک مثال نقض بنویسید.

الف) هر دو مثلث هم‌نهشت دارای مساحت‌های برابر هستند.
ب) در دو مثلث متشابه، ضلع‌های متناظر، متناسب هستند.

۱۹- ثابت کنید در هر مثلث، مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.

۲۰- ثابت کنید در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچکتر است.

«سؤالات تستی»

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۲۱ـ کدام گزینه در مورد استدلال استقرایی درست نیست؟

الف) نتیجه آن حتماً درست است.
ب) نتیجه آن نمی‌تواند همیشه درست باشد.
ج) براساس حدس و گمان است.
د) براساس مشاهدات و آزمایش است.

۲۲- مثال نقض گزاره «چهارضلعی‌ای که قطرهایش مساوی باشد متوازی‌الاضلاع است» کدام است.

الف) مربع
ب) لوزی
ج) مستطیل
د) ذوزنقه متساوی‌الساقین

۲۳- کدام گزینه مثال نقض ندارد؟

الف) هر ۴ ضلعی که ۴ ضلع برابر داشته باشد مربع است.
ب) هر چهارضلعی که چهار زاویه قائمه داشته باشد، مستطیل است.
ج) به ازاء هر عدد حقیقی مقدار عبارت $n^2 + n + 17$ عدد اول است.
د) اگر دو قطر چهارضلعی برابر باشند، چهارضلعی مربع است.

۲۴- کدام قضیه به صورت قضیه دو شرطی بیان نمی‌شود؟

الف) در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر و نصف وتر است.
ب) در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه 30° نصف وتر است.
ج) در مثلث قائم‌الزاویه، عمود منصف اضلاع روی وتر متقاطع‌اند.
د) در هر مثلث، ضلع روبه رو زاویه 90° بزرگترین ضلع است.

۲۵- با کدام‌یک از سه طول داده شده در گزینه‌های زیر می‌توان مثلث ساخت؟

الف) $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{10}$
ب) $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$
ج) $2m$ و $m-1$ و $m+1$
د) ۵ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$

۲۶- نقطه همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC که ضلع‌های آن به ترتیب ۵ و ۷ و ۱۲ سانتی‌متر است، کجا قرار دارد؟

الف) خارج مثلث
ب) وسط ضلع بزرگتر
ج) داخل مثلث
د) روی رأس مقابل به ضلع بزرگتر

۲۷- مثلثی با سه ارتفاع ۴، ۵ و ۶ چه نوع مثلثی است؟

الف) قائم‌الزاویه
ب) متساوی‌الساقین
ج) مختلف‌الاضلاع با زاویه‌های حاده
د) مختلف‌الاضلاع با زاویه باز

۲۸- کدام گزینه زیر صحیح است؟

الف) عمود منصف همه مثلث‌های متساوی‌الساقین یکدیگر را در درون مثلث قطع می‌کنند.
ب) هیچ مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود ندارد که متساوی‌الساقین باشد.
ج) در هر مثلث متساوی‌الاضلاع محل برخورد ارتفاع‌ها در درون مثلث است.
د) در هر مثلث محل برخورد هر دو ارتفاع دلخواه که رسم شود، درون مثلث است.

۲۹- نقیض گزارهٔ «اگر برف ببارد، علی همراه خود چتر می‌آورد» کدام است؟

الف) اگر برف نبارد، علی همراه خود چتر نمی‌آورد.
ب) اگر برف نبارد، علی همراه خود چتر می‌آورد.
ج) اگر برف ببارد، علی همراه خود چتر نمی‌آورد.
د) هیچکدام

۳۰- در یک مثلث مجموع دو زاویه داخلی 68° است، کدام گزینه درست است.

الف) نقطه برخورد عمود منصف‌های مثلث داخل مثلث قرار دارد.
ب) نقطه برخورد سه میانه و مثلث خارج از مثلث قرار دارد.
ج) نقطه برخورد ارتفاع‌های مثلث روی ضلع بزرگتر قرار دارد.
د) نقطه برخورد نیمسازهای داخلی مثلث داخل مثلث قرار دارد.

بیان دو نسبت مساوی را تناسب گویند در تناسب خواصی وجود دارد که مهمترین آن‌ها عبارتند از:

۱) اگر در تناسب دو نسبت را معکوس نمائیم باز هم یک تناسب داریم: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

۲) طرفین وسطین: در یک تناسب، حاصل‌ضرب طرفین برابر است با حاصل‌ضرب وسطین $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$

۳) ترکیب نسبت در صورت و یا مخرج $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\end{cases}$

۴) تفصیل نسبت در صورت و یا مخرج $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\\ \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}\end{cases}$

۵) جمع صورت‌ها و مخرج‌ها: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\ ,\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k\Rightarrow\frac{ma+nc+re}{ma+nd+rf}=k$

۶) تعویض جای طرفین یا وسطین $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a}\end{cases}$

۱- کامل کنید.

الف) در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، باعکس نسبت .... وارد بر آنها برابر است.

ب) اگر دو مثلث دارای قاعده‌های مشترک باشند و رأس‌های روبروی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند این مثلث‌ها ......

ج) اگر اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آنها برابر است با نسبت اندازهٔ .... که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد شده است.

د) اگر $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$ باشد b را .... بین a و c می‌نامیم و بین آنها رابطهٔ ...... $=b^۲$ برقرار است.

۲- ثابت کنید درهر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع وارد بر آنها برابر است:

۳- اگر $\frac{a}{۲}=\frac{b}{۶}=\frac{c}{۸}=\frac{۱۲}{۲۴}$ باشد حاصل $۲a+b+c^۲$ را حساب کنید.

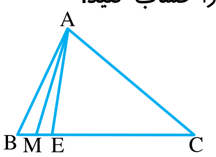
۴- میانگین هندسی دو عدد $۴\sqrt{۳}$ و $۵\sqrt{۳}$ را حساب کنید.

۵- اگر $\frac{x}{y}=\frac{۲}{۳}$ باشد حاصل $\frac{x^۲-y^۲}{(x-y)^۲}$ را حساب کنید.

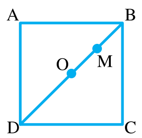
۶- واسطه هندسی بین دو عدد $۲\times۵^۳\times۳^۳$ و $۳\times۵\times۲^۳$ را حساب کنید.

۷- اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=۵$ باشد آن‌گاه نسبت $\frac{۳a+۲b-۴c}{۳a'+۲b'-۴c'}$ چقدر است؟

۸- طول اضلاع مثلثی ۳ و ۴ و ۵ سانتی‌متر است اگر بلندترین ارتفاع آن ۴ سانتی‌متر باشد. کوچکترین ارتفاع را حساب کنید.



۹- در شکل زیر مساحت مثلث ACE چهار برابر مساحت مثلث AME و سه برابر مساحت مثلث ABM است نسبت $\frac{ME}{BM}$ و $\frac{BC}{MC}$ را به دست آورید.



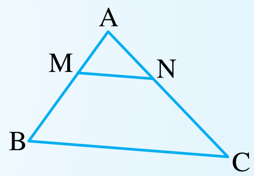
۱۰- در شکل مقابل طول ضلع مربع ۸ و $\frac{DM}{MB}=\frac{۴}{۳}$ است. فاصله M از مرکز مربع یعنی نقطه O را به دست آورید.

۱۱- طول اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌متر و بلندترین ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}$ است طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را حساب کنید.

۱۲- زاویه‌های داخلی مثلثی متناسب با اعداد ۸ و ۵ و ۲ می‌باشد. اندازه کوچکترین زاویه خارجی این مثلث چند درجه است؟

الف) ۷۲° ب) ۸۴ ج) ۹۴° د) ۸۲°

رابطهٔ تالس اگر در یک مثلث پاره‌خطی موازی یکی از ضلع‌ها رسم کنیم تا دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع نماید، پاره‌خط‌های روی دو ضلع دیگر با هم متناسبند.



رابطهٔ تالس $MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$

تعمیم قضیهٔ تالس $MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

عکس رابطهٔ تالس $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$

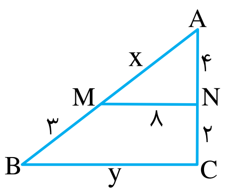
۱- قضیهٔ تالس ثابت کنید: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع نماید، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط به وجود می‌آید که اندازه‌های آن‌ها تشکیل یک تناسب را می‌دهند.

فرض $MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$ حکم

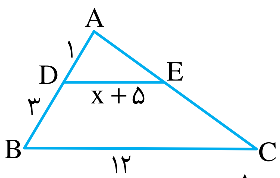
۲- عکس رابطهٔ تالس ثابت کنید: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب ایجاد کند، آن‌گاه با ضلع دوم مثلث موازی است:

فرض $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$ حکم

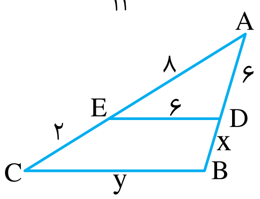
۳- در شکل زیر $MN \parallel BC$ است با توجه به اندازه‌های روی شکل مقدار x و y را حساب کنید.



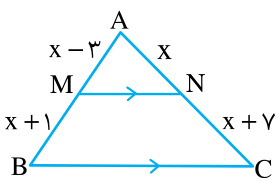
۴- در شکل زیر $DE \parallel BC$ است مقدار x را حساب کنید.



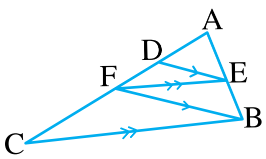
۵- در شکل زیر $DE \parallel BC$ است مقادیر x و y را حساب کنید.



۶- در شکل زیر اندازهٔ ضلع AC را حساب کنید.



۷- در مثلث ABC، DE با FB و EF با BC موازی است ثابت کنید: $\dfrac{AD}{DF} = \dfrac{AF}{FC}$

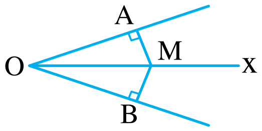


۸- در مثلث ABC از نقطهٔ N واقع بر ضلع BC خطی موازی میانهٔ AM رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC و امتدادها آن‌ها را در نقاط K و L قطع کند ثابت کنید: $\dfrac{AK}{AL} = \dfrac{AB}{AC}$

پاسخ فصل اول (درس ۱)

۱- مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فواصل نقاط روی آن از نقطه ثابتی به نام مرکز به یک اندازه است.

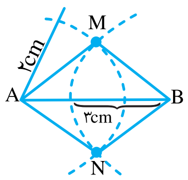
۲- خطی است که بر پاره‌خط عمود بوده و پاره‌خط را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. ویژگی عمود منصف این است که فاصله هر نقطه روی آن از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است.



۳- نیمساز نیم‌خطی است که از رأس زاویه گذشته و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. خاصیت آن این است که فاصله هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه با هم برابر است. مثلاً در شکل روبرو اگر OX نیمساز زاویه O باشد همواره داریم:

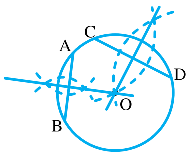
$$MA = MB$$

۴- الف) به یک فاصله ب) هیچ لوزی‌ای ج) بی‌شمار د) به یک اندازه



۵- ابتدا یکی از اضلاع مثلاً ۴ سانتی‌متر را با خط‌کش رسم می‌کنیم و آن را AB می‌نامیم سپس با استفاده از خط‌کش و پرگار دو کمان یکی به شعاع ۲ و دیگری شعاع ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم به طوری که همدیگر را در دو نقطه M و N قطع کنند. ما دو جواب داریم یکی مثلث ABM و دیگری ABN

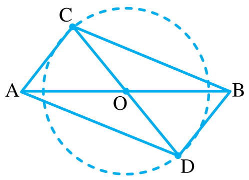
۶- خیر، چون در هر مثلث باید مجموع دو ضلع ازضلع سوم بزرگتر باشد ولی $۷ = ۵ + ۲$ از ضلع سوم یعنی ۷ بزرگتر نیست.



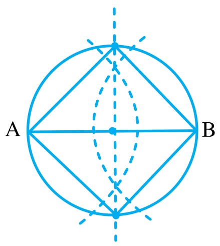
۷- مطابق شکل ابتدا دو وتر دلخواه غیر موازی مانند AB و CD را رسم می‌کنیم. سپس عمود منصف‌های دو وتر را با استفاده از خط‌کش و پرگار رسم می‌کنیم که همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنندآن نقطه مرکز دایره است. (نقطهٔ O)

تذکر ۱: برای رسم عمود منصف یک پاره‌خط دهانه پرگار را به اندازه دلخواه بزرگتر از نصف پاره‌خط باز کرده و به مرکز دو سر پاره‌خط دو کمان می‌زنیم تا همدیگر را در دو نقطه قطع کنند خطی که از آن دو نقطه می‌گذرد، عمود منصف آن پاره خط است.

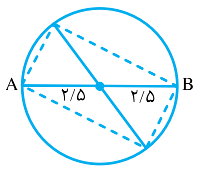
تذکر ۲: مرکز دایره روی عمود منصف‌های وترهای آن قرار دارد.



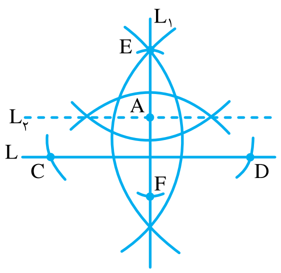
۸- می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند. ابتدا پاره‌خطی به طول ۴cm رسم می‌کنیم (AB) سپس وسط آن را پیدا کرده و به مرکز وسط آن (O) و به شعاع ۱/۵ cm دایره‌ای می‌زنیم. هر قطر دلخواهی از این دایره که رسم نمائیم قطر دیگر متوازی‌الاضلاع است و چون بی‌شمار قطر می‌توان رسم کرد پس بی‌نهایت متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد، که یکی از آنها در شکل روبه‌رو رسم شده است. قطر CD از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ خواسته شده است.



۹- می‌دانیم در مربع قطرها بر هم عمودند و همدیگر را نصف می‌کنند (قطرها عمود منصف یکدیگرند) پس ابتدا یک قطر ۵cm را می‌کشیم و عمود منصف آن را با استفاده از خط‌کش و پرگار رسم می‌کنیم روی دو طرف عمود منصف از هر طرف به اندازهٔ ۲/۵ سانتی‌متر جدا می‌کنیم و مربع را رسم می‌کنیم یا می‌توان بعد از رسم عمود منصف دایره‌ای به مرکز محل برخورد عمود منصف و قطر رسم شده شعاع ۲/۵ سانتی‌متر رسم کرده هر کجا عمود منصف را قطع کرد انتهای قطر دیگر مربع است.



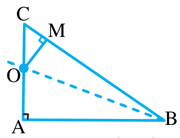
۱۰- می‌دانیم در مستطیل قطرها منصف یکدیگرند و با هم مساویند. پس ابتدا یک قطر ۵cm را رسم می‌کنیم (AB) و وسط آن را پیدا کرده و به مرکز وسط آن و شعاع ۲/۵cm یک دایره رسم می‌کنیم هر قطر دلخواهی از دایره را که رسم کنیم، قطر دیگر مستطیل است و چون بی‌شمار ازاین قطرها می‌توانیم رسم کنیم پس می‌توان بی‌شمار مستطیل با فرض مسأله رسم کرد. (می‌توان برای پیدا کردن وسط AB عمود منصف AB را نیز رسم کرد.)



۱۱- یادآوری می‌شود که دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند.

فرض کنیم نقطه A و خط مفروض L باشد. ابتدا به مرکز نقطه A دو کمان دلخواه می‌زنیم تا خط L را در دو نقطه C و D قطع کند. عمود منصف پاره‌خط CD را رسم کرده و آن را L_1 می‌نامیم. دوباره به همین روش عمود منصف پاره‌خط EF را رسم می‌کنیم و آن را به L_2 می‌نامیم چون L_2 و L هر دو بر خط L_1 عمودند پس $L_2 \parallel L$ است و از نقطه A می‌گذرد.

۱۲- **گزینه «د» صحیح است.** با توجه به مسئله ۸ جواب بی‌شمار است.



۱۳- **گزینهٔ «الف» صحیح است.** مثلث زیر را در نظر می‌گیریم.
فرض کنیم نقطه مورد نظر O باشد و $O.A = OM$ بنابراین چون فاصله نقطه O از دو ضلع زاویه B یکی است. پس O روی نیمساز زاویه B قرار دارد.

۱۴- **گزینهٔ «ج» صحیح است.** می‌دانیم هر نقطه که فاصله آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد و چون سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث همرس‌اند. پس نقطه همرسی (یک نقطه) از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

۱۵- **گزینهٔ «ب» صحیح است.**

۱۶- **گزینهٔ «الف» صحیح است.** چون هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و سه عمود منصف مثلث متساوی‌الاضلاع همرس‌اند پس نقطه همرسی (یک نقطه) از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

پاسخ فصل اول (درس ۲)

۱- استدلال استقرایی و استدلال استنتاجی – استدلال براساس مشاهده و آزمایش را استقرایی گفته و استدلال براساس تعاریف و نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، را استنتاجی می‌گوئیم.

۲- «الف» و «ب» و «د» و «هـ» گزاره است چون جمله‌ای خبری است که دقیقاً درست یا نادرست است. «ج» و «و» و «ز» گزاره نیست چون خبری را نمی‌رساند.

۳- الف) قضیه ب) عکس قضیه ج) گزاره د) برهان خلف هـ) قضیه دو شرطی

۴- الف) مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای خارجی آن ۳۶۰ درجه نیست. ب) $\sqrt{3}$ گویا است.

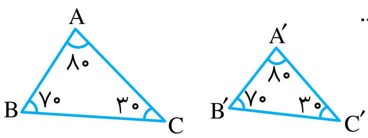
ج) b بزرگتر یا مساوی a است. د) عدد ۵۱ فرد نیست یا عدد ۵۱ زوج است.

۵- الف) عکس قضیه ← اگر در یک چهارضلعی قطرها همدیگر را نصف کنند آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

ب) عکس قضیه ← اگر در مثلثی روی دو ضلع دو نقطه M و N وجود داشته و پاره‌خط‌های روی دو ضلع متناسب باشند آنگاه پاره‌خط رسم شده (MN) موازی ضلع سوم است.

ج) عکس قضیه ← اگر در مثلثی بین سه ضلع a و b و c رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار باشد، آن‌گاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

د) عکس قضیه ← اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر



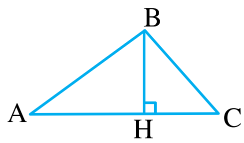
۶- عکس قضیه: اگر در دو مثلث اندازه سه زاویه برابر باشند، آن‌گاه اندازه سه ضلع آنها نیز برابرند.
عکس قضیه درست نیست. با یک مثال نقض آن را بررسی می‌کنیم.
در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مقابل سه زاویه برابرند ولی مشاهده می‌شود سه ضلع برابر نیستند.
نتیجه: همیشه عکس یک قضیه ممکن است، قضیه نباشد.

۷- ۱) فرض می‌کنیم که نقیض حکم درست باشد. ۲) نشان می‌دهیم که نقیض حکم درست نیست و با قضایا یا فرض‌های مسأله یا تعاریف در تناقض است. ۳) با این فرض به تناقض می‌رسیم و نتیجه می‌گیریم که نقیض حکم درست نیست پس خود حکم درست است.

۸- اثبات: ۱) فرض می‌کنیم که نقیض حکم درست باشد یعنی BH بر AC عمود است. فرض: $\hat{B} = 90^\circ$ و $\hat{B}_1 \neq \hat{A}$

۲) با توجه به فرض بالا داریم. $\hat{H} = 90^\circ$ حکم: BH بر AC عمود نیست

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\Delta}{ABH}: \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 90^\circ \\ &\overset{\Delta}{BCH}: H = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C} = 90^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_1$$

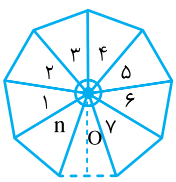


۳) نتیجه به دست آمده با فرض مسئله ($\hat{B}_1 \neq \hat{A}$) در تناقض است. پس BH نمی‌تواند بر AC عمود باشد.

۹- اثبات ۱) فرض می‌کنیم $\hat{A} = \hat{C}$ باشد در این صورت داریم: فرض: $AB \neq BC$ و حکم: $\hat{A} \neq \hat{C}$

۲) چون مثلث متساوی‌الساقین می‌شود. $\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow AB = BC$

۳) نتیجه به دست آمده با فرض مسأله در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم مسئله برقرار است.



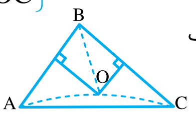
۱۰- اثبات: اگر یک n ضلعی محدب مانند شکل در نظر بگیریم و از نقطه‌ای داخل آن به رأس‌هایش وصل کنیم دارای n مثلث ایجاد می‌شود که مجموع زوایای داخلی n مثلث برابر با $n \times 180$ می‌شود. که با توجه به شکل می‌دانیم که زوایای $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \ldots + \hat{O}_n$ جز زوایای رئوس چند ضلعی نمی‌باشند و داریم:

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \ldots + \hat{O}_n = 360^\circ = 2 \times 180^\circ$$

پس مجموع زوایای چند ضلعی محدب برابر است با $n \times 180 - 2 \times 180^\circ = (n-2) \times 180^\circ$

۱۱- **اثبات:** در مثلث ABC شکل مقابل داریم: عمودمنصف‌های دو ضلع AB و BC همدیگر را در نقطه O قطع کرده‌اند. چون نقطه O روی عمود منصف دو ضلع AB و BC قرار دارد پس طبق خاصیت عمود منصف از دو سر هر کدام از ضلع‌ها به یک فاصله‌اند و بنابراین

$$\left.\begin{matrix} OA = OB \\ OB = OC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OA = OC$$



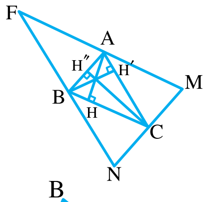
رابطه بالا نشان می‌دهد که نقطه O روی عمود منصف ضلع AC نیز قرار دارد. بنابراین سه عمود منصف سه ضلع مثلث همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند یعنی در نقطه O همرس‌اند و قضیه ثابت است.

۱۲- **اثبات:** از سه رأس مثلث ABC سه پاره‌خط MN و MF و NF را به موازات ضلع‌های مقابل آن‌ها رسم می‌کنیم تا مثلث MNF به وجود آید.

$$\left.\begin{matrix} AM \parallel BC \\ AB \parallel MC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{متوازی‌الاضلاع است } AMCB \Rightarrow BC = AM \qquad (1)$$

$$\left.\begin{matrix} AC \parallel FB \\ AF \parallel BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{متوازی‌الاضلاع است } AFBC \Rightarrow BC = AF \qquad (2)$$

(۲) و (۱) $\Rightarrow AM = AF \Rightarrow$ A وسط MF است.



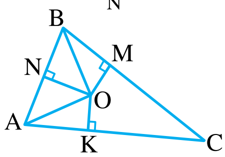
می‌دانیم اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است، داریم:

$$\left.\begin{matrix} AH \perp BC \\ BC \parallel MF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp MF \Rightarrow$$ AH عمود منصف پاره‌خط MF است.

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که BH' عمود منصف FN و CH'' عمود منصف MN است.

پس سه ارتفاع مثلث، روی عمود منصف‌های اضلاع مثلث MFN هستند و در نتیجه همرس‌اند. (طبق قضیه بالا)

۱۳- ثابت کنید نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث همرس‌اند.



اثبات: در شکل مقابل نیمسازهای دو زاویه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ همدیگر را در نقطه O قطع کرده‌اند. می‌دانیم فاصله هر نقطه روی نیمساز هر زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک اندازه است. با توجه به شکل داریم:

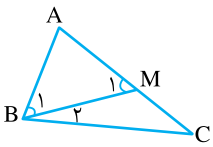
$$\left.\begin{matrix} OM = ON \\ ON = OK \end{matrix}\right\} \Rightarrow OM = OK$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که نقطه O روی نیمساز زاویه C نیز قرار دارد یعنی سه نیمساز همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند یعنی سه نیمساز داخلی مثلثی همرس‌اند.

> **نکته:** در هر مثلث، نیمسازهای داخلی، ارتفاع‌ها، عمودمنصف‌های اضلاع و میانه‌ها همرس‌اند (یعنی هریک از سه خط از یک نقطه عبور می‌کنند)

۱۴- **اثبات:** روی ضلع AC نقطه M را طوری انتخاب می‌کنیم که $AM = AB$ شود. فرض: $AB > BC$ و حکم: $\hat{B} > \hat{C}$

$$AM = AB \xrightarrow{\text{متساوی الساقین } \overset{\Delta}{ABM}} \hat{B}_1 = \hat{M}_1 \text{ و } \hat{B}_1 < B \Rightarrow \hat{M}_1 < \hat{B} \qquad (1)$$



زاویه $\hat{M}_1$ در مثلث MBC زاویه خارجی است و اندازه آن برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن یعنی:

$$\hat{M}_1 = \hat{B}_2 + \hat{C} \Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{C} \qquad (2)$$

از دو رابطه ۱ و ۲ نتیجه می‌شود. $\hat{B} > \hat{C}$ و حکم ثابت است.

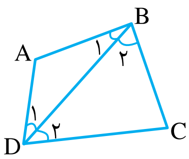
۱۵- **اثبات:** (با برهان خلف) فرض کنیم $AB = AC$ یا $AC < AB$ باشد.

فرض: $\hat{B} > \hat{C}$ و حکم: $AC > AB$

هر کدام از حالت‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر $AB = AC$ باشد مثلث ABC متساوی‌الساقین است و بنابراین $\hat{B} = \hat{C}$ و این با فرض مسئله در تناقض است س فرض خلف باطل است.

حالت دوم: اگر $AC < AB$ باشد، طبق قضیه بالا باید $\hat{B} < \hat{C}$ شود که با فرض مسأله در تناقض است، پس فرض خلف باطل است، بنابراین چون فرض خلف در هر دو حالت باطل شد و به تناقض رسیدیم پس حکم برقرار است یعنی $AC > AB$

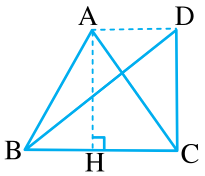


۱۶- با توجه به قضیه بالا داریم:

$$\left.\begin{matrix} \overset{\Delta}{ABD} : AB > AD \Rightarrow \hat{D}_1 < \hat{B}_1 \\ \overset{\Delta}{DBC} : BC < DC \Rightarrow \hat{D}_2 < \hat{B}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{D}_2 < \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \Rightarrow \hat{D} < \hat{B}$$

۱۷- چون BD نیمساز زاویه $\hat{B}$ است پس $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ از طرف دیگر $\hat{D} = 45^\circ$ زاویه خارجی مثلث BDC است داریم:

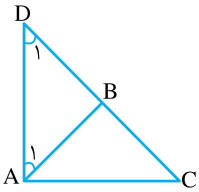
$$\hat{D} = 45^\circ = \hat{B}_2 + \hat{C} \Rightarrow \hat{D} = \hat{B}_1 + \hat{C} \Rightarrow \hat{D} > \hat{B}_1 \qquad \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \hat{B}_1 < 45^\circ \\ \hat{B}_2 < 45^\circ \end{matrix}\right. \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 < 45 + 45 \Rightarrow \hat{B} < 90^\circ$$



۱۸- الف) اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند مساحت آنها برابر است، عکس آن صحیح نیست چون ممکن است دو مثلث هم ارتفاع و هم قاعده باشند و مساحت برابر داشته باشند ولی هم‌نهشت نباشند. مانند شکل مقابل که دو مثلث ABC و BCD هم قاعده و هم مساحت هستند ولی هم‌نهشت نیستند. $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{DBC}} = \frac{1}{2}AH\times BC$

ب) اگر دو مثلث متشابه باشند، آنگاه ضلع‌های متناظر متناسب هستند. عکس قضیه شرطی است و درست است.

۱۹- اثبات: در مثلث ABC، ضلع BC را به اندازهٔ ضلع AB از طرف رأس B امتداد می‌دهیم تا نقطه D به دست آید. D را به A وصل می‌کنیم. در مثلث BDA داریم:



$$DC = BD + BC \xrightarrow{BD=AB} DC = AB + BC$$

از طرف دیگر داریم

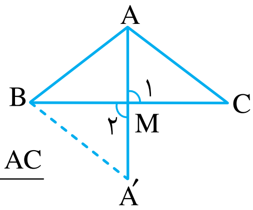
$$AB = BD \xrightarrow{\text{مثلث ABD متساوی‌الساقین}} \hat{D}_1 = \hat{A}_1$$

با توجه به شکل: $D\hat{A}C > \hat{A}_1 \Rightarrow D\hat{A}C > D_1 \xrightarrow{\text{بنا به قضیه کتاب}} DC > AC \Rightarrow AB + BC > AC$

به همین ترتیب برای بقیه ضلع‌ها نیز ثابت می‌شود.

۲۰- اثبات: میانه AM را از طرف M امتداد می‌دهیم تا به نقطه A' برسیم طوری انتخاب می‌کنیم که $AM = A'M$ (۱)

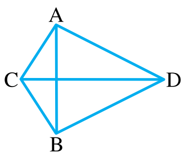
$$\left.\begin{array}{l} AM = A'M \\ BM = CM \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض زض)}} \overset{\Delta}{AMC} \cong \overset{\Delta}{A'MD} \Rightarrow AC = A'B \qquad (۲)$$



در مثلث ABA' $\xrightarrow{\text{طبق قضیه بالا}} AA' < AB + BA' \xrightarrow{1,2} 2AM < AB + AC \Rightarrow AM < \frac{AB + AC}{2}$

۲۱- گزینهٔ «الف» صحیح است.

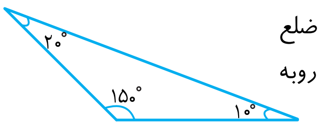
۲۲- گزینهٔ «الف» صحیح است.



۲۳- گزینهٔ «ب» صحیح است. الف) لوزی ۴ ضلع برابر دارد ولی مربع نیست. ب) مثال نقض ندارد.

ج) به ازاء $n = 17$ عبارت بر ۱۷ بخش‌پذیر است و عدد اول نیست. $(AB = CD)$

د) در کایت مقابل قطرها برابرند ولی مربع نیست.



۲۴- گزینهٔ «د» صحیح است. الف و ب و ج به صورت دو شرطی بیان می‌شوند ولی در قسمت «د» ضلع روبه رو زاویه‌های باز (منفرجه) بزرگترین ضلع هستند و هر چه زاویه به ۱۸۰ درجه نزدیکتر شود ضلع روبه رو به آن بزرگتر می‌شود.

۲۵- گزینهٔ «ب» صحیح است.

می‌دانیم در هر مثلث باید مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر باشد، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

الف) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{10}$ نمی‌توان

ب) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{5}, \sqrt{2} + \sqrt{5} > \sqrt{3}, \sqrt{3} + \sqrt{5} > \sqrt{2}$ می‌توان $\sqrt{7} \simeq 2/2, \sqrt{3} \simeq 1/7, \sqrt{2} \simeq 1/4$

ج) $m + 1 + m + 1 > 2m \Rightarrow$ نمی‌توان $2m \not> 2m$

د) $\sqrt{7} + \sqrt{3} \not> 5$ نمی‌توان $\sqrt{7} \simeq 2/65, \sqrt{3} \simeq 1/7$

۲۶- گزینهٔ «الف» صحیح است. با توجه به نکته زیر داریم: (a بزرگترین ضلع است)

نکته: نقطه همرسی ارتفاع‌های مثلث
- داخل مثلث $\Leftarrow$ تمام زوایای حاده — اگر $\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$
- روی رأس قائمه $\Leftarrow$ یک زاویه قائمه — اگر $\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$
- خارج مثلث $\Leftarrow$ یک زاویه باز دارد — اگر $\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

نقطه همرسی خارج مثلث قرار دارد. $12^2 > 7^2 + 8^2 \Rightarrow 144 > 49 + 64 \Rightarrow 144 > 113 \Rightarrow$

۲۷- گزینهٔ «د» صحیح است. با استفاده از مساحت مثلث داریم. (می‌دانیم در مثلث نسبت ارتفاع‌ها با عکس نسبت ضلع‌ها متناسب است یعنی ارتفاع بزرگتر بر روی ضلع کوچکتر وارد می‌شود)

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}a\times h_a = \frac{1}{2}b\times h_b = \frac{1}{2}c\times h_c \Rightarrow a = \frac{2s}{h_a}, b = \frac{2s}{h_b}, c = \frac{2s}{h_c}$$

$$a^2 = (\frac{2s}{4})^2 = \frac{4s^2}{16}, b^2 = \frac{4s^2}{25}, c^2 = \frac{4s^2}{36}$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{4s^2}{16} > \frac{4s^2}{25} + \frac{4s^2}{36} \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ \Rightarrow$$